GEGENERALISEERDE FUNCTIES EN FOURIER-TRANSFORMATIES MET EEN INTRODUCTIE TOT TIJDVARIANTE CIRCUITS

Fred Neerhoff

Faculteit Informatietechniek en Systemen
Afdeling Micro-elektronica
Technische Universiteit Delft
(E-mail: F.L.Neerhoff@its.tudelft.nl)

Samenvatting

De opzet van dit artikel is tweeledig. Eerst wordt een beknopte uiteenzetting gegeven over gegeneraliseerde functies en hun Fouriergetransformeerden. Dan blijkt o.m. dat de standaardformule voor het frequentiespectrum van een lineaire tijd-invariante capaciteit geen algemene geldigheid heeft. De in [1] gesignaleerde ongerijmdheden worden ermee verklaard.
Daarna wordt stapsgewijs overgegaan naar tijdvariant systeemgedrag. Lineaire tijdvariante circuits zijn o.m. van belang voor niet-lineaire klein-signaal toepassingen. Aan de hand van een lineaire tijdvariante RC-combinatie worden kernbegrippen uit de tijd-invariante theorie, zoals trillingsmodus, eigenfrequentie en pool gegeneraliseerd naar tijdvariante circuits. De nu optredende pool blijkt een hoogfrequent pool te zijn, die niet langer samenvalt met de eigenfrequentie. Evenmin blijkt een pool in het rechter halfvlak te duiden op instabiliteit. De enige stabiliteitsvoorwaarde is een negatieve Lyapunov exponent.
De oplossing van lineaire tijdvariante circuits van grotere complexiteit bestaat uit een lineaire combinatie van afzonderlijke trillingsmodi. De bijbehorende eigenfrequenties volgen uit een gegeneraliseerde karakteristieke vergelijking. Dit blijkt een differentiaalvergelijking van Riccati te zijn.

1.Inleiding

In [1] wordt gepoogd het verband te leggen tussen het tijd- en frequentiegedrag van een lineaire tijd-invariante capaciteit. Daarbij stuit de auteur op inconsistenties. Vreemd is dat niet: het impedantie concept wordt op tweeërlei manieren onjuist gebruikt. In de eerste plaats is het natuurlijk niet toegestaan zich te beroepen op de complexe rekenwijze. Die beperkt zich juist tot de stationaire toestand; overgangsverschijnselen blijven ten principale buiten beschouwing. De andere misvatting is minder triviaal. In dit artikel laten we zien dat de gehanteerde formule voor de gegeneraliseerde impedantie evenmin algemene geldigheid heeft.
Voorts wordt een korte, maar fundamentele introductie gegeven tot lineaire tijdvariante elektrische circuits. Deze komen o.m. naar voren bij de klein-signaal analyse van niet-lineaire elektronische circuits [2].
In par.2 wordt het in [1] gestelde probleem geformuleerd voor een elementaire stroomintegrator. De twee volgende paragrafen geven een door [3] en [4] geïnspireerde uiteenzetting over respectievelijk gegeneraliseerde functies en hun Fouriergetransformeerden. De behandeling is beknopt en blijft elementair, maar is toereikend voor de meeste toepassingen. In par.5 wordt ermee aangetoond dat de standaardformule voor de gegeneraliseerde impedantie aanpassing behoeft als de integratorstroom in het frequentiedomein delta-functies bevat. De uiteengezette rekenmethodiek wordt in par.6 getoetst aan de hand van rekenvoorbeelden.
Daarna wordt de methodiek in par.7 eerst uitgebreid naar een lineaire tijdvariante capaciteit. Voor het frequentiespectrum resulteert een integraalvoorstelling in het frequentie-domein, die overgaat in een integraalvergelijking als de capaciteit vervolgens wordt aangesloten op een lineaire weerstand. Ofschoon de oplossing van deze vergelijking niet onmiddellijk volgt, laten we in par.8 zien dat het toch betrekkelijk eenvoudig is om een expliciete uitdrukking voor het frequentiespectrum te noteren.
Anders dan de eerdere aanpak, wordt nu eerst een differentiaalvergelijking voor de tijdvariante RC-combinatie opgesteld. De oplossing is eenvoudig verkrijgbaar, en wordt geïnterpreteerd als een elementaire trillingsmodus met tijdvariërende amplitude en eveneens tijdvariërende eigenfrequentie. Na een Fourier-transformatie van de trillingsmodus volgt het gezochte frequentiespectrum. Het hoogfrequent spectrum blijkt te worden gedomineerd door een klassieke pool in het complexe frequentie-vlak.
Onder de voorwaarde van een negatieve Lyapunov-exponent blijft het circuit stabiel, zelfs als de pool in het rechter halfvlak ligt. In de laatste paragraaf wordt mede op basis van eerdere resultaten geschetst hoe tijdvariante systemen van grotere complexiteit begrepen kunnen worden.

2.Inleidende probleemstelling

Neem een capaciteit waardoor op elk tijdstip t een gegeven stroom $i = i(t)$ vloeit. Indien als gevolg daarvan de lading

$q = q(t)$ wordt geaccumuleerd, geldt

$$i(t) = q'(t) \qquad \text{of} \tag{1a}$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau \ , \tag{1b}$$

waarbij steeds is aangenomen dat $q(-\infty) = 0$.
Als in [1], nemen we voorlopig aan dat de capaciteit lineair en tijd-invariant is. De spanning $u = u(t)$ erover is dan gegeven door

$$u(t) = C^{-1} q(t) \ , \tag{2}$$

waarin de constante C de capacitantie is. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we voorlopig $C = 1$ farad nemen. Met de stroom als uitgangspunt, staat de capaciteit dan voor een elementaire *integrator* met input-output relatie (1b).
De volgende inputs komen aan bod [1]

$$i(t) = \delta(t) \ , \tag{3a}$$

$$i(t) = \sin(\omega_0 t)\epsilon(t) \ , \tag{3b}$$

$$i(t) = \epsilon(t) \ . \tag{3c}$$

Hierin zijn $\delta(t)$ en $\epsilon(t)$ respectievelijk Dirac's eenheidsimpuls (delta-functie) en de Heaviside's eenheidsstap. Zij worden opgevat als *gegeneraliseerde functies*. Substitutie van (3) in de input-output relatie (1b) levert na integratie achtereenvolgens de outputs

$$q(t) = \epsilon(t) \ , \tag{4a}$$

$$q(t) = \omega_0^{-1}(1 - \cos(\omega_0 t))\epsilon(t) \ , \tag{4b}$$

$$q(t) = t\epsilon(t) \ . \tag{4c}$$

Hierin is (4a) de impulsresons van de integrator. Als we deze voor het moment noteren als $h(t)$ dan volgen de overige responsies ook uit de convolutieintegraal

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i(\tau) h(t - \tau) d\tau \ , \tag{5}$$

die na uitwerken (1b) reproduceert.
Ter inleiding willen we als in [1], de uitkomsten (4) reconstrueren via de omweg van het *frequentie-domein*. Het gebruik van gegeneraliseerde functies en Fouriertransformaties staat daarbij centraal. Hieronder volgt een beknopte uiteenzetting.

3.Gegeneraliseerde functies

Het rekenen met gegeneraliseerde functies is een delicate aangelegenheid. De algemene regel is dat zolang *zinvolle* interpretaties mogelijk blijven, er *formeel* met gegeneraliseerde functies gerekend kan worden alsof het gewone functies betrof.
Het onderscheidende kenmerk van gegeneraliseerde functies is dat zij niet worden gedefinieerd door hun functiewaarden, maar door hun functie*eigenschappen*.
Zo wordt de delta-functie $\delta(x)$ formeel vastgelegd door

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\gamma(x) dx = \gamma(0) \tag{6}$$

voor elke voldoend 'gladde' functie $\gamma(x)$ die voor $|x| \to \infty$ voldoende snel naar nul gaat. Alléén $\delta(x)$ heeft eigenschap (6).
De formule kan intuitief worden begrepen door $\delta(x)$ voor te stellen als de limiet van een rij pulsen, elk gecentreerd rondom $x = 0$, die bij gelijkblijvend eenheidsoppervlak een alsmaar afnemende pulsbreedte krijgen. Hiermee is het precieze verloop van een puls ondergeschikt gemaakt aan het *effect* (de integraal) ervan [5].
Middels een formele partiële integratie wordt met (6) voor de gegeneraliseerde afgeleide van $\delta(x)$ gevonden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\gamma(x) dx = -\gamma'(0) \tag{7}$$

voor elke $\gamma(x)$ als bedoeld in (6). Merk op dat de stokterm in (7) is weggevallen wegens het veronderstelde gedrag van $\gamma(x)$ voor $|x| \to \infty$.
Daar gegeneraliseerde functies niet puntsgewijs zijn gedefinieerd, behoeft het gelijkstellen van twee exemplaren $g_1(x)$ en $g_2(x)$ nadere precisering. We stellen

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\gamma(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)\gamma(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g_1(x) = g_2(x) \tag{8}$$

voor elke $\gamma(x)$ als bedoeld in (6).
Enkele resultaten uit de theorie van gegeneraliseerde functies zijn nu snel geverifieerd.
Vervang dan eerst $\delta(x)$ in (6) door $\delta(-x)$ en substitueer $-x = y$. Met (8) volgt dan $\delta(-x) = \delta(x)$: de delta-functie is een *even* functie.
Verder: indien $\text{sgn}(x)$ de discontinue functie is die gelijk is aan 1 voor $x > 0$ en -1 voor $x < 0$, dan volgt met partiële integratie

$$\int_{-\infty}^{\infty} (d \ \text{sgn}(x) \,/\, dx)\gamma(x) dx = 2\gamma(0) \tag{9}$$

voor elke $\gamma(x)$ als bedoeld in (6). Vervang hierin $\gamma(0)$ door het linkerlid van (6) en er wordt met (8) verkregen

$$d \ \text{sgn}(x) \,/\, dx = 2\delta(x) \ . \tag{10}$$

Hieruit vinden we nog $\delta(x) = 0$ voor $x \neq 0$, terwijl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2}(d \ \text{sgn}(x) \,/\, dx) \, dx = 1 \ . \tag{11}$$

Tevens geeft (10) met de identiteit

$$\text{sgn}(x) = 2\epsilon(x) - 1 \tag{12}$$

het verband tussen $\delta(x)$ en $\epsilon(x)$ als

$$d \, \epsilon(x) \,/\, dx = \delta(x) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{x} \delta(y) dy = \epsilon(x) \ . \tag{13}$$

Indien voorts $\delta(x)$ in (6) wordt vervangen door $f(x)\delta(x)$ waarin $f(x)$ continu in de buurt van $x = 0$, wordt via (8) gevonden

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \ , \tag{14}$$

zodat met (11) ook

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) . \tag{15}$$

Een analoge afleiding die start met (7) levert

$$f(x)\delta'(x) = -f'(0)\delta(x) + f(0)\delta'(x) \tag{16}$$

voor elke $f(x)$, continu differentieerbaar rondom $x = 0$. Ofschoon machten van delta-functies *niet* zijn gedefinieerd, hebben we voor het *product* van twee delta-functies met *ongelijke* singulariteiten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x)\delta(x) f(x) dx = f(0)\delta(x_0) . \tag{17}$$

Immers, zij $F(x_0)$ het rechterlid van (17) dan volgt met (6) en (14)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_0)\gamma(x_0) dx_0 = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x)\gamma(x_0) dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x)\delta(x) f(x) dx \\ = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0)\gamma(x_0) dx_0 , \end{aligned} \tag{18}$$

waarna via (8) formule (17) volgt. Met $f(x) = 1$ is ook

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x)\delta(x) dx = \delta(x_0) . \tag{19}$$

Ofwel, het *convolutieproduct* van twee delta-functies levert weer een delta-functie. Compact genoteerd:

$$\delta(x) * \delta(x) = \delta(x) , \tag{20}$$

waarin $*$ het convolutieteken is. Uit (20) volgt nog

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x)\delta(x) dx = 0 \quad \text{als} \quad x_0 \neq 0 , \tag{21}$$

zodat met (14) eveneens

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x)\delta(x)\gamma(x) dx = 0 \quad \text{als} \quad x_0 \neq 0 . \tag{22}$$

Via (8) concluderen we voor het *product* van twee delta-functies met *ongelijke* singulariteiten

$$\delta(x_0 - x)\delta(x) = 0 \quad \text{als} \quad x_0 \neq 0 . \tag{23}$$

Tenslotte laten we zien dat zodra gegeneraliseerde functies worden toegelaten, de uitdrukking

$$x\, g(x) = f(x) \tag{24}$$

equivalent is met

$$g(x) = x^{-1} f(x) + K\delta(x) . \tag{25}$$

waarin K een willekeurige constante is. Vermenigvuldig dan eerst (25) links en rechts met x, en vind met $x\delta(x) = 0$ (vergelijk (14)) formule (24) terug. Dus (24) is consistent met (25). Tel vervolgens bij het rechterlid van (24) het nulelement $Kx\delta(x)$ op. Het resultaat delen door x geeft (25) terug. Derhalve is (25) ook consistent met (24).

4.Fourier-transformaties

De Fouriergetransformeerde van de tijdsfunctie $g(t)$, genoteerd als $\mathcal{F}\{g(t)\}$, is voor elke reële waarde van de frequentie ω gegeven door

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt . \tag{26}$$

Met de eis dat de inverse Fouriergetransformeerde van $g(t)$ juist $g(t)$ zélf oplevert, dus

$$g(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{g(t)\} \exp(j\omega t) d\omega , \tag{27}$$

vinden we met (15) de volgende voorstelling voor Dirac's eenheidsimpuls

$$\delta(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm j\omega t) d\omega , \tag{28}$$

waarin tot uitdrukking is gebracht dat $\delta(t)$ even is. Er volgt direct

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega) \tag{29}$$

en via (26) met (14) tevens

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 . \tag{30}$$

Ter verkrijging van de Fouriergetransformeerde van $\mathrm{sgn}(t)$ passen we er eerst de eigenschap

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = j\omega \mathcal{F}\{g(t)\} \tag{31}$$

op toe. Samen met (10) en (30) vinden we

$$j\omega \mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = 2 , \tag{32}$$

hetgeen blijkens de equivalentie tussen (24) en (25) leidt tot

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = 2(j\omega)^{-1} + K\delta(\omega) . \tag{33}$$

Nu is $\mathrm{sgn}(t)$ oneven in t, en dus $\mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\}$ oneven in ω. Derhalve is het rechterlid van (33) eveneens oneven in ω. Echter, $\delta(\omega)$ is even, zodat we concluderen tot $K = 0$. Uiteindelijk krijgen we

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = 2(j\omega)^{-1} . \tag{34}$$

Combineren van (34) met (12) en (29) geeft de Fouriergetransformeerde van de Heavside's eenheidsstap, genoteerd als $E(\omega)$, als

$$E(\omega) = \mathcal{F}\{\epsilon(t)\} = (j\omega)^{-1} + \pi\delta(\omega) . \tag{35}$$

We spitsen ons nu toe op de integrator van par.2.

5.Integrator in frequentie-domein

Indien $I(\omega)$ en $Q(\omega)$ de *frequentiespectra* (Fouriergetransformeerden) van respectievelijk $i(t)$ en $q(t)$ zijn, dan gaat (1a) met eigenschap (31) over in

$$I(\omega) = j\omega Q(\omega) . \tag{36}$$

Hierin wordt $I(\omega)$ bekend verondersteld en is $Q(\omega)$ gevraagd. Op grond van de equivalentie tussen (24) en (25) volgt

$$Q(\omega) = (j\omega)^{-1} I(\omega) + K\delta(\omega) \tag{37}$$

met K willekeurig. Anderzijds vinden we via (1b)

$$Q(\omega) = E(\omega)I(\omega) = ((j\omega)^{-1} + \pi\delta(\omega))I(\omega) \, . \tag{38}$$

Dit is eenvoudig te verifiëren door (16) eerst te schrijven als (vergelijk (5))

$$q(t) = \epsilon(t) * i(t) \, , \tag{39}$$

en vervolgens de convolutiestelling voor Fourierparen toe te passen.
Zie nu in dat de geldigheid van (38), in tegenstelling tot (37), alleen verzekerd is indien $I(\omega)$ vrij is van delta-functies met singulariteiten voor $\omega = 0$. Zonder deze restrictie zou het wegwerken van de haakjes in het rechterlid van (38) leiden tot niet toegelaten machten van delta-functies.
Voor het overige zijn (37) en (38) *identiek*. Onder genoemde restrictie geldt immers $I(\omega)\delta(\omega) = I(0)\delta(\omega)$ (vergelijk(14)), terwijl $K = \pi I(0)$ kan worden genomen.
Het is nu duidelijk dat formule (38) *géén* algemene geldigheid heeft: zodra $I(\omega)$ termen bevat met $\delta(\omega)$ komt formule (37) daarvoor in de plaats. We zullen spoedig zien dat de constante K in (37) wordt vastgelegd middels het *causaliteitsbeginsel*.
Dit is te verwachten: de *differentiaal*-formulering (1a), waaruit (37) via (36) voortkomt, staat los van de causaliteit. Die kan derhalve nog expliciet worden geëist. Daarentegen is de causaliteit via de *integraal*-formulering (1b) reeds verzekerd: de geaccumuleerde lading q ten tijde t wordt bepaald door het verleden van de stroom i tot aan het tijdstip t.
Tenslotte wordt via (2) van respectievelijk (38) en (37) afgelezen dat een lineaire tijd-invariante *capaciteit* in het frequentie-domein kan worden voorgesteld door een *impedantie* van $(j\omega C)^{-1}$ ohm *in serie* met een *spanningsbron* met sterkte $C^{-1}I(0)\delta(\omega)$ volt, dan wel $C^{-1}K\delta(\omega)$ volt, afhankelijk of $I(\omega)$ géén, of juist wèl termen met $\delta(\omega)$ bevat. Blijkens (36) en (38) kan de capaciteit ook worden vooorgesteld door een enkele *admittantie* van $(j\omega C)$ siemens.

6.Rekenvoorbeelden

De Fouriergetransformeerde inputs (3) worden respectievelijk met (30), (35) en de verschuivingsregel gevonden als

$$I(\omega) = 1 \, , \tag{40a}$$

$$I(\omega) = (2j)^{-1}[E(\omega - \omega_0) - E(\omega + \omega_0)] \, , \tag{40b}$$

$$I(\omega) = E(\omega) \, . \tag{40c}$$

We laten zien dat hiermee de outputs (4) worden teruggevonden.

Substitueer dan eerst (40a) in (38) ($I(\omega)$ is vrij van delta-functies) en vindt met (35) de impulsrespons (4a) direct terug. Altenatief vinden we met (37)

$$Q(\omega) = (j\omega)^{-1} + K\delta(\omega) \, . \tag{41}$$

Nu levert terugtransformeren met gebruik van (34) en (29)

$$q(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) + K(2\pi)^{-1} \, . \tag{42}$$

De constante K volgt met het *causaliteitsbeginsel*: voor $t < 0$ is de input $i(t)$ nog nul, zodat de output $q(t)$ eveneens nul moet zijn voor $t < 0$. We vinden $K = \pi$, waarmee (4a) ten andere male volgt.
Substitueer nu de getransformeerde input (40b) in (38). Het *frequentiespectrum* van de output wordt

$$Q(\omega) = (2j)^{-1}[E(\omega)E(\omega - \omega_0) - E(\omega)E(\omega + \omega_0)] \tag{43}$$

die met toepassing van de convolutiestelling en de verschuivingsregel wordt teruggetransformeerd naar

$$\begin{aligned} q(t) &= (2j)^{-1}\epsilon(t) * \epsilon(t)[\exp(j\omega_0 t) - \exp(-j\omega_0 t)] \\ &= \epsilon(t) * \sin(\omega_0 t)\epsilon(t) = (\int_0^t \sin(\omega_0 \tau)d\tau)\epsilon(t) \, , \end{aligned} \tag{44}$$

waarmee output (4b) volgt. Een andere aanpak substitueert uitdrukking (35) voor $E(\omega)$ in (43) en werkt vervolgens de haakjes weg. Met toepassing van formule (23) voor producten van delta-functies met onderling verschoven singulariteiten volgt na enig rekenwerk

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= (2\omega)^{-1} \times \\ &\times [2(j\omega)^{-1} - (j(\omega - \omega_0))^{-1} - (j(\omega + \omega_0))^{-1}] + \\ &- \pi(2\omega_0)^{-1}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \pi\omega_0^{-1}\delta(\omega) \, , \end{aligned} \tag{45}$$

hetgeen m.b.v. (34) en de verschuivingsregel opnieuw output (4b) oplevert. Alternatief kan input (40b) óók in (37) worden ingevuld. Met dezelfde procedure als hiervoor, komen we dan uit op formule (45) met de term $K\delta(\omega)$ op de plaats van $\pi\omega_0^{-1}\delta(\omega)$. De *causaliteitseis* vindt $K = \pi\omega_0^{-1}$, waarna output (4b) ten derde male volgt.
Het laatste voorbeeld betreft de getransformeerde input (40c) die met (35) een term met $\delta(\omega)$ bevat. Ofschoon de geldigheid van (38) nu niet is verzekerd, volgt na doorzetten van de substitutie van (40c) in (38) de uitdrukking

$$Q(\omega) = E(\omega)E(\omega) \, , \tag{46}$$

die na een formele toepassing van de convolutiestelling toch de correcte output (4c) oplevert. Immers

$$q(t) = \epsilon(t) * \epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\tau)\epsilon(t - \tau)d\tau = t\epsilon(t) \, . \tag{47}$$

Een minder gewaagde reconstructie maakt gebruik van (37), in plaats van (38). Dan vinden we

$$Q(\omega) = (j\omega)^{-1}((j\omega)^{-1} + \pi\delta(\omega)) + K\delta(\omega) \, , \tag{48}$$

hetgeen met $\delta(\omega) = -\omega\delta'(\omega)$ (vergelijk (16)) wordt herleid tot

$$Q(\omega) = (j\pi\delta'(\omega) - \omega^{-2}) + K\delta(\omega) . \qquad (49)$$

Toepassen van de eigenschap

$$\mathcal{F}\{tg(t)\} = j\frac{d\mathcal{F}\{g(t)\}}{d\omega} \qquad (50)$$

op $g(t) = \epsilon(t)$, levert de teruggetransformeerde van (49) als

$$q(t) = t\epsilon(t) + K(2\pi)^{-1} . \qquad (51)$$

Tenslotte geeft de *causaliteitseis* $K = 0$, zodat output (4c) opnieuw volgt.
Opgemerkt wordt nog dat het product $(j\omega)^{-1}E(\omega)$ in het rechterlid van (48) kennelijk *niet* via de convolutiestelling teruggetransformeerd kan worden. Dat zou een divergente integraal opleveren waaraan *géén zinvolle* betekenis toegekend kan worden.

7.Tijdvariantie: frequentiespectrum via frequentie-domein

Voor een lineaire *tijdvariante* capaciteit gaat de constitutieve relatie (2) over in [5]

$$u(t) = s(t)q(t) , \qquad (52)$$

waarin de elastantie $s(t)$ de inverse is van de nu tijdafhankelijke capacitantie $C(t)$. Samen met (1b) geeft (52) de input-output relatie van een lineair tijdvariant systeem. Zij $h(t, \tau)$ de respons op de verschoven eenheidsimpuls $i(t) = \delta(t - \tau)$, dan is de respons $u(t)$ op de input $i(t)$ te schrijven als [6] (vergelijk (5))

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)i(\tau)d\tau . \qquad (53)$$

Voor de tijdvariante capaciteit vinden we $h(t, \tau) = s(t)\epsilon(t - \tau)$, waarmee de uitkomst van (53) via (1b) identiek wordt aan (52).
Het *frequentiespectum* $U(\omega)$ van de spanning $u(t)$ wordt met de convolutiestelling van (52) afgelezen als

$$U(\omega) = (2\pi)^{-1}S(\omega) * Q(\omega) , \qquad (54)$$

waarin $S(\omega)$ de Fouriergetransformeerde van $s(t)$ is. Indien de getransformeerde input $I(\omega)$ geen termen met $\delta(\omega)$ bevat, gaat (54) samen met (38) over in

$$U(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \nu)E(\nu)I(\nu)d\nu , \qquad (55)$$

hetgeen met (35) en (15) wordt herleid tot de volgende *integraalvoorstelling* voor $U(\omega)$

$$U(\omega) = (2\pi j)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \nu)\nu^{-1}I(\nu)d\nu + \\ + \tfrac{1}{2}S(\omega)I(0) . \qquad (56)$$

We controleren deze uitdrukking voor de input $i(t) = \delta(t)$, terwijl steeds $s(t) = 0$ voor $t < 0$ wordt genomen (*causaal* systeem). Met $I(\omega) = 1$ verkrijgen we

$$U(\omega) = (2\pi j)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\nu)}{(\omega - \nu)}d\nu + \tfrac{1}{2}S(\omega) , \qquad (57)$$

waarin wegens de causaliteit

$$S(\omega) = \int_{0}^{\infty} s(t)\exp(-j\omega t)dt , \qquad (58)$$

en

$$U(\omega) = \int_{0}^{\infty} u(t)\exp(-j\omega t)dt . \qquad (59)$$

Ter evaluering van de integraal in (57) stellen we eerst vast dat het rechterlid van (58) een regulier analytische functie definieert in de beneden helft van het complexe ω-vlak. Middels contoursluiting in dat halfvlak en met gebruik van de residuenstelling van Cauchy vinden we $\frac{1}{2}S(\omega)$ als uitkomst van de eerste term in het rechterlid van (57). Uiteindelijk volgt $U(\omega) = S(\omega)$. Dit is inderdaad juist gelijk aan de Fouriergetransformeerde van (52) indien $i(t) = \delta(t)$.
Tot nu toe hebben we steeds de stroom door de capaciteit bekend verondersteld. Voor een elektrisch *circuit* waarvan de capaciteit deel uitmaakt, is dat niet langer het geval: dan zijn $u(t)$ en $i(t)$ *beide* onbekend.
We geven een voorbeeld, en analyseren een *lineair tijdvariant circuit* waarbij een lineaire tijdvariante capaciteit is aangesloten op een lineaire tijd-invariante weerstand met resistantie R. Naast (1) en (52) voor de capaciteit, hebben we nu ook $u(t) = -Ri(t)$ voor de weerstand. Combineren resulteert via (56) in de volgende uitdrukking voor het *frequentiespectrum* $U(\omega)$ van de spanning $u(t)$ over de RC-combinatie

$$-U(\omega) = (2\pi jR)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \nu)\nu^{-1}U(\nu)d\nu + \\ + (2R)^{-1}S(\omega)U(0) . \qquad (60)$$

Dit is een *integraalvergelijking* in het frequentie-domein waaruit de onbekende $U(\omega)$ moet worden opgelost. Daar $U(\nu)$ met (59) regulier analytisch is in de *beneden* helft van het complexe ν-vlak, terwijl $S(\omega - \nu)$ dat juist is in de *boven* helft, kan niet zonder meer worden overgegaan tot contoursluiting. Ofschoon het aanwenden van de gegeneraliseerde functietheorie een mogelijke oplossingsstrategie biedt [4], blijft er het nadeel van ondoorzichtigheid aan kleven.
Toch is het betrekkelijk eenvoudig een expliciete uitdrukking voor $U(\omega)$ op te schrijven. In plaats van die te zoeken in het frequentie-domein, gaan we daartoe eerst de spanning in het *tijd-domein* bepalen!

8.Tijdvariantie: frequentiespectrum via tijd-domein

We kiezen meteen voor een algemene opzet waar de capaciteit en de weerstand *beide* lineair en tijdvariant zijn.

Dit is een realistisch model om het *klein-signaal* gedrag van elke *niet-lineaire* RC-combinatie te doorgronden [2]. De constitutieve relaties worden respectievelijk gegeven door (52) voor de capaciteit, terwijl we voor de weerstand noteren [5]

$$i(t) = -g(t)u(t) \;, \tag{61}$$

waarin $g(t)$ de tijdvariërende conductantie is. Samen met (52) vinden we

$$i(t) = -g(t)s(t)q(t) \;, \tag{62}$$

die na substitutie van (1a) de volgende *lineaire tijdvariante differentiaalvergelijking* voor de lading q oplevert (N.B. De toestandsvariabele q is bij afwezigheid van een stroomimpuls door de C steeds *continu* in de tijd. Voor de spanning over een *tijdvariante* C is dit *niet* noodzakelijk; vergelijk (1b) en (52) en zie tevens [7].)

$$\dot{q}(t) = \lambda(t)q(t) \;, \tag{63}$$

waarin we zijn overgeschakeld naar de notatie van Newton voor een tijdsafgeleide, terwijl $\lambda(t)$ de *dynamische eigenwaarde* van (63) is [8], hier gevonden als

$$\lambda(t) = -g(t)s(t) \;. \tag{64}$$

Onder de aanname dat $q(0)$ gegeven is, kan men eenvoudig verifiëren dat

$$q(t) = q(0)\exp(\gamma(t)) \tag{65}$$

met

$$\gamma(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau \tag{66}$$

de oplossing is van (63). Nu volgen de stroom $i(t)$ en de spanning $u(t)$ met respectievelijk (62), (64) en (61) als

$$i(t) = q(0)\lambda(t)\exp(\gamma(t)) \tag{67}$$

en

$$u(t) = q(0)s(t)\exp(\gamma(t)) \;. \tag{68}$$

De uitdrukkingen (67) en (68) kunnen fysisch worden geduid als een *trillingsmodus* met *tijdvariërende amplitude* $q(0)\lambda(t)$, respectievelijk $q(0)s(t)$ en *tijdvariërende fase* $\gamma(t)$ [9]. Bovendien wordt van (66) afgelezen dat $\dot{\gamma}(t) = \lambda(t)$ de betekenis heeft van de inverse van een *tijdvariërende relaxatietijd* ('tijdconstante') of algemener, een *tijdvariërende eigenfrequentie*.
Tenslotte vinden we met (59) de gezochte uitdrukking voor het *frequentiespectrum* $U(\omega)$ van de *spanning* over de RC-combinatie als

$$U(\omega) = q(0)\int_0^\infty s(t)\exp(\gamma(t) - j\omega t)dt \;, \tag{69}$$

en analoog voor het *freqentiespectrum* $I(\omega)$ van de *stroom* erdoor als

$$I(\omega) = q(0)\int_0^\infty \lambda(t)\exp(\gamma(t) - j\omega t)dt \;. \tag{70}$$

We controleren deze uitdrukkingen voor een tijd-invariant circuit. Met $s(t) = C^{-1}$ en $g(t) = R^{-1}$ is $\lambda(t) = -(RC)^{-1} = \lambda$, zodat $\gamma(t) = \lambda t$. Hiermee leveren de integralen in (69) en (70) respectievelijk

$$U(\omega) = \frac{-Rq(0)\lambda}{(j\omega - \lambda)} \quad \text{en} \quad I(\omega) = \frac{q(0)\lambda}{(j\omega - \lambda)} \;, \tag{71}$$

waarbij is aangenomen dat de RC-combinatie *stabiel* is, dus $\lambda < 0$. Met (71) volgt dat de frequentiespectra $U(\omega)$ en $I(\omega)$ beide *geheel* worden bepaald door een enkele *pool* voor $j\omega = \lambda$ in het complexe $j\omega$-vlak. Bovendien valt de pool samen met de eigenfrequentie λ.
We keren terug naar de tijdvariante opzet, en proberen de integralen (69) en (70) toe te werken naar de uitkomsten (71). Met de substitutie (vergelijk (66))

$$dt = (\lambda(t) - j\omega)^{-1}d(\gamma(t) - j\omega t) \tag{72}$$

kan de integraal in (70) worden herschreven als

$$I(\omega) = q(0)\int_0^\infty \frac{\lambda(t)}{(\lambda(t) - j\omega)} d\exp(\gamma(t) - j\omega t) \;, \tag{73}$$

die na uitwerken overgaat in

$$I(\omega) = \frac{q(0)\lambda(0)}{(j\omega - \lambda(0))} + \\ + q(0)\int_0^\infty \frac{j\omega\dot{\lambda}(t)}{(\lambda(t) - j\omega)^2}\exp(\gamma(t) - j\omega t)dt \;, \tag{74}$$

terwijl voor (69) een soortgelijke uitkomst wordt gevonden. Hierbij is steeds ondersteld dat 1. $\lambda(t)$ is begrensd voor $t \to \infty$ en 2. $t^{-1}\gamma(t) < 0$ voor $t \to \infty$. M.a.w., het RC-circuit is *stabiel* en wordt gekenmerkt door een *negatieve Lyapunov-exponent* μ. Deze is gedefinieerd als [10]

$$\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln|x(t)| \;, \tag{75}$$

waarin $x(t)$ naar keuze staat voor $u(t)$ of $i(t)$. Onder de staande aanname dat $\lambda(t)$ begrensd is voor $t \to \infty$, kan de stabiliteitsvoorwaarde $\mu < 0$ volgens (67) en (68) ook genoteerd worden als [11]

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t \lambda(\tau)d\tau < 0 \;, \tag{76}$$

waarvan duidelijk valt af te lezen dat naast negatieve, óók *positieve* waarden van $\lambda(t)$ zijn toegestaan, mits op den duur de *gemiddelde* waarde van $\lambda(t)$ negatief uitvalt.
Nogmaals toepassen van de substitutie (72), maar nu op de integraal in (74) geeft

$$I(\omega) = \frac{q(0)\lambda(0)}{(j\omega - \lambda(0))} + \frac{q(0)\dot{\lambda}(0)j\omega}{(j\omega - \lambda(0))^3} + \\ + q(0)\int_0^\infty f(t,\omega)\exp(\gamma(t) - j\omega t)dt \;, \tag{77}$$

waarin $f(t,\omega) = j\omega(\ddot{\lambda}(j\omega - \lambda) + 3\dot{\lambda}^2)(j\omega - \lambda)^{-4}$. Deze procedure kan onbeperkt worden doorgezet, resulterend in een reeks die het frequentiespectrum steeds beter benadert. Voor *hoge frequenties* wordt samen met de stelling van Riemann-Lebesgue van (77) afgelezen

$$I(\omega) = \frac{q(0)\lambda(0)}{(j\omega - \lambda(0))} + \mathcal{O}(\omega^{-2}) \text{ voor } \omega \to \infty \,, \tag{78}$$

terwijl analoog wordt gevonden

$$U(\omega) = -\frac{R(0)q(0)\lambda(0)}{(j\omega - \lambda(0))} + \mathcal{O}(\omega^{-2}) \text{ voor } \omega \to \infty \,, \tag{79}$$

waarin $R(0) = (g(0))^{-1}$ en $\mathcal{O}$ het orde symbool van Landau voorstelt. Merk nog op dat(78) en (79) in overeenstemming zijn met de stelling van Abel, die zegt dat voor $\omega \to \infty$

$$i(0) = j\omega I(\omega) \quad \text{en} \quad u(0) = j\omega U(\omega) \,. \tag{80}$$

Met (78) en (79) verwerven we het inzicht dat het *hoogfrequentspectrum* van een *tijdvariant* RC-circuit wordt gedomineerd door een enkele *pool* voor $j\omega = \lambda(0)$ in het complexe $j\omega$-vlak. Anders dan bij het tijd-invariante RC-circuit, valt deze pool *niet* langer samen met de eigenfrequentie $\lambda(t)$, terwijl bovendien $\lambda(0) > 0$ kan zijn en toch is voldaan aan de stabiliteitsvoorwaarde!
Indien $\dot{\lambda}(t) = 0$ vinden we nog uit (74)

$$I(\omega) = \frac{q(0)\lambda(0)}{(j\omega - \lambda(0))} \,, \tag{81}$$

terwijl tevens blijkt

$$U(\omega) = -\frac{R(0)q(0)\lambda(0)}{(j\omega - \lambda(0))} \,. \tag{82}$$

Daar de voorwaarde $\dot{\lambda}(t) \simeq 0$ betrekking heeft op een zogenaamd *langzaam variërend* ('slowly-varying') RC-circuit [11], concluderen we dat het frequentiespectrum van zo'n circuit, net als bij de tijd-invariante tegenvoeter, *geheel* wordt bepaald door een enkele *pool* voor $j\omega = \lambda(0)$. Maar anders dan in het tijd-invariante geval, is het langzaam variërende RC-circuit zelfs stabiel als $\lambda(0) > 0$, mits $\lambda(t)$ blijft voldoen aan (76).
Tenslotte wordt opgemerkt dat een tijdvariante RL-combinatie tot identieke conclusies leidt. Immers, op grond van het dualiteitsbeginsel komen de stroom i, de spanning u, de magnetische flux ϕ, de inductantie L en de conductantie G op de plaats van respectievelijk u, i, q, C en R [5].

9.Conclusies

Na een gestroomlijnde behandeling van gegeneraliseerde functies en hun Fouriergetransformeerden, lieten we zien dat de standaardformule voor het frequentiespectrum van een enkele capaciteit als stroomintegrator geen algemene geldigheid heeft. De uitdrukking die daarvoor in de plaats is afgeleid, werd getoetst aan de hand van rekenvoorbeelden.
Daarna werd stapsgewijs overgegaan naar tijdvariant systeemgedrag. Worden voor lineaire tijd-invariante circuits lineaire algebraïsche vergelijkingen in het frequentiedomein gevonden, nu resulteren lineaire integraalvergelijkingen. De oplossingen ervan liggen niet binnen handbereik.
Een directe aanpak in het tijd-domein biedt meer perspectief. De daar gevonden oplossing van een lineaire tijdvariante differentiaalvergelijking m.b.t. een tijdvariante RC-combinatie werd geïnterpreteerd als een enkele trillingsmodus. Deze wordt gekenmerkt door een tijdvariërende amplitude en een eveneens tijdvariërende eigenfrequentie. De modus is alléén satabiel, als zijn Lyapunov-exponent negatief is.
De baan die de eigenfrequentie in het complexe vlak als functie van de tijd beschrijft, karakteriseert het gehele frequentiespectrum van de modus. Het beginpunt van de baan komt overeen met een hoogfrequent pool, terwijl de gemiddelde waarde langs de baan uitsluitsel geeft over de stabiliteit.
Op grond van de lineariteit resulteert voor lineaire tijdvariante circuits van grotere complexiteit een lineaire combinatie van afzonderlijke trillingsmodi. Derhalve worden zulke circuits gekarakteriseerd door meerdere eigenfrequenties en evenzoveel hoogfrequent polen. Dit is een mogelijke verklaringsgrond voor de gevonden numerieke uitkomsten in [12].
Als bij tijd-invariante circuits, volgen de nu tijdvariërende eigenfrequenties uit een karakteristieke vergelijking. Maar in plaats van een algebraische vergelijking, wordt nu een zogenaamde Riccati differentiaalvergelijking gevonden [11, 13]. Dit is ook de reden dat de Riccati-vergelijking een sleutelrol speelt in de theorie van lineaire systemen. Oplossingsstrategieën voor deze vergelijking zijn derhalve zeer gewenst [13, 14, 15]. Wèl is duidelijk dat de eigenfrequenties niet langer complex geconjugeerd behoeven te zijn [8, 16].

Referenties

[1] P. van der Wurf, *Over condensator-impedanties en andere ongerijmdheden*, Tijdschr. Ned. Elektronica- en Radiogenootschap, deel 64, nr.2(1999), blz. 82-83.

[2] F.L. Neerhoff, P. van der Kloet, A. van Staveren, C.J.M. Verhoeven, *Nonlinear Electronics: a linear time-varying circuit approach*, accepted for publ. in Proceedings ProRisk'99, Mierlo(1999).

[3] M.J. Lighthill, *Introduction to Fourier analysis and generalised functions*, Cambridge Press(1970).

[4] D.S. Jones, *Generalised functions*, McGraw-Hill(1966).

[5] F.L. Neerhoff, *Elektrische Circuits; model, structuur en dynamica*, deel 1, tweede druk, DUP, Delft(1996).

[6] A. Papoulis, *The Fourier integral and its applications*, McGraw-Hill(1962).

[7] C.A. Desoer, E.S. Kuh, *Basic circuit theory*, McGraw-Hill(1969).

[8] P. van der Kloet, F.L. Neerhoff, *On eigenvalues and poles for second order linear time-varying systems*, Proceedings NDES'97, Moskow(1997), pp. 300-305.

[9] M.Y. Wu, *On the stability of linear time-varying systems*, Internat. Journ. of Systems Science, Vol.15(2)(1984), pp. 137-150.

[10] L.Ya. Adrianova, *Introduction to linear systems of differential equations*, Am. Math. Soc.(1995).

[11] P. van der Kloet, F.L. Neerhoff, *Behaviour of dynamic eigenpairs in slowly-varying systems*, Proceedings NDES'99, Ronne, Denmark(1999), pp. 9-12.

[12] E. Kleihorst, *Frequency domain analysis for nonlinear electronic circuits*, Proefschrift, TU-Delft(1994).

[13] P. van der Kloet, F.C. Kuystermans, F.L. Neerhoff, A. van Staveren, C.J.M. Verhoeven, *A note on dynamic eigenvalues and slowly-varying systems*, Proceedings X. Int.Symp. on Theoretical Elecr. Eng., Magdeburg, Germany(1999), pp. 141-144.

[14] P. van der Kloet, F.L. Neerhoff, *Iteration schemes for the modal solutions of linear time-varying systems*, Proceedings NDES'99, Ronne, Denmark(1999), pp. 25-28.

[15] P. van der Kloet, F.L. Neerhoff, *Diagonalization algorithms for linear time-varying systems*, accepted for publ. in Internat. Journ. of Systems Science.

[16] E.W.Kamen, *The poles and zeros of a linear time-varying system*, Lin. Algebra and its Appl., Vol. 98(1988), pp. 263-289.