

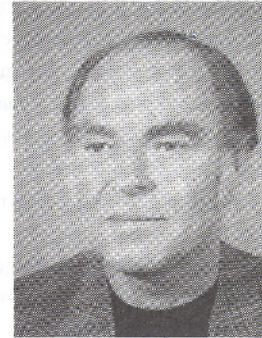
TRILLINGSVERSCHIJNSELEN IN NIET-LINEAIRE CIRCUITS

Fred Neerhoff

Technische Universiteit Delft
Faculteit der Elektrotechniek

Summary

In this tutorial paper, nonlinear circuit oscillations are placed in a historical context. A short introduction to elementary nonlinear circuit theory is included. The dynamical route and the associated jump phenomenon are presented as key concepts in nonlinear first order dynamics. Hysteresis is understood as nonlinear first order parasitic dynamics. State-space concepts are introduced by second order autonomous circuits. Then, relaxation oscillations are explained as parasitic limit-cycle behaviour. Second order, non-autonomous Van der Pol and Duffing circuits are used throughout as a vehicle to illustrate forced nonlinear oscillations. Subharmonic and quasi-periodic oscillations are classified by Poincaré cross-sections. Next, the concept of a chaotic attractor is presented, followed by the period-doubling and period-adding bifurcation routes to chaos. Finally, a concise treatment of Chua's oscillator is given. The existence of a homoclinic point is indicated as a key for chaotic oscillation. A list of off-the-shelf components for building a robust Chua's oscillator is also included. In conclusion, some applications of the theory are briefly mentioned.



1. INLEIDING

Met de transistor als bepalende bouwsteen zijn elektronische circuits per definitie niet-lineair. Niettemin zijn lineaire ontwerpmethoden uiterst succesvol gebleken. Zij worden gerechtvaardigd doordat het statische niet-lineaire instelcircuit veelal kan worden gescheiden van een in essentie lineair signaalcircuit. Daarbij zorgt de instelling ervoor dat het dynamische gedrag zich afspeelt op de lineaire gedeelten van de niet-lineaire transistor karakteristieken.

De keuze voor een lineaire strategie lijkt evenwel minder logisch bij het ontwerp van bijvoorbeeld geheugen of oscillator circuits. Daar waar de niet-lineaire circuit dynamica juist een centraal aspect van het werkingsmechanisme is, kan een lineaire invalshoek gemakkelijk tot omslachtige en zelfs misleidende beschouwingen leiden.

De aantrekkingskracht van de lineaire aanpak is duidelijk: met de gecombineerde toepassing van de Fourier-theorie en het superpositie beginsel kan het lineaire, algebraïsche denken tot in het frequentie-domein worden doorgezet. Indien de circuit eigenschappen voor een enkele frequentie expliciet bekend zijn, kan de signaal uitkomst voor alle frequenties moeiteloos worden voorspeld. Voor digitale circuits geldt een analoog argument.

Bij een fundamenteel niet-lineaire opzet faalt deze strategie: het superpositie beginsel is niet langer geldig. Naast allerlei ingewikkelde, weinig flexibele analytische benaderingstechnieken rest dan slechts een numerieke aanpak. De resulterende 'brute force' berekeningen hebben echter op hun beurt het nadeel weinig inzichtelijke uitkomsten op te leveren.

In deze onbevredigende situatie tekent zich de laatste decennia een ontwikkeling ten gunste af. Bij het ruim beschikbaar komen van computerfaciliteiten, werden numerieke experimenten al snel gemeengoed. Daarbij werd, geheel onverwacht, 'ontdekt' dat zelfs zeer eenvoudige niet-lineaire systemen een zeer complex, ja zelfs chaotisch aandoend gedrag kunnen vertonen. Aanvankelijk werden de nieuwe, langs numerieke weg verkregen inzichten met grote scepsis onthaald. Velen konden zich eenvoudigweg niet goed voorstellen dat determinis-

tische modellen in de praktijk tot slechts beperkt voorspelbare uitkomsten kunnen leiden. En bovendien, waarom waren die verschijnselen niet eerder waargenomen?

De werkelijkheid is subtieler dan de vraag suggereert. Chaotische verschijnselen zijn wel zeker eerder waargenomen, maar werden wegens het ontbreken van een valide interpretatiekader doorgaans toegeschreven aan 'experimentele ruis', of bleven anderszins in de mist hangen.

Uiteindelijk hebben experimenten aan een scala van relevante fysische niet-lineaire systemen het eerdere ongelof doen omslaan in massieve nieuwsgierigheid. En, wegens het hopeloos tekort schieten van lineaire verklaringsmodellen, werden de geïnteresseerden wel gedwongen naar nieuwe conceptuele kaders te zoeken.

Die nieuwe concepten gaan terug tot H. Poincaré, die aan het eind van de vorige eeuw een studie ondernam naar planeet bewegingen. De wiskundigen die de geometrische, kwalitatieve aanpak van Poincaré sindsdien verder hadden ontwikkeld, deden dat in betrekkelijk isolement van de meer toegepaste wetenschappen. Maar halverwege de jaren zestig, beginjaren zeventig, was de tijd rijp voor een wederzijdse toenadering. Een stormachtige opleving van de niet-lineaire dynamica was het gevolg. Na nog eens tien, vijftien jaar, werden de effecten duidelijk merkbaar in de elektrotechniek, gepaard gaand met een toenemende, hernieuwde openstelling voor de niet-lineaire optiek.

Het is verheugend dat het Nederlands Elektronica- en Radio-Genootschap heeft besloten om bij haar 75-jarig jubileum aandacht te geven aan de geschetste ontwikkeling, om die in de historische context van de eigen traditie te plaatsen. Daartoe moet in de eerste plaats het werk van B. van der Pol en G.J. Elias worden gerekend. Van beiden verscheen in dit tijdschrift een reeks artikelen met als overkoepelend thema de behandeling van trillingsverschijnselen in niet-lineaire circuits [1], [2]. Beiden speelden tevens een prominente administratieve rol in het Genootschap. B. van der Pol als oprichter van het Nederlands Radiogenootschap (voorloper van het NERG) en G.J. Elias als eerste voorzitter na de tweede wereldoorlog.

De door Van der Pol en Elias behandelde, gescheiden problematiek klinkt tot op heden door in de moderne ontwikkelingen. Het eenvoudige, maar niet-lineaire RLC-circuit dat Elias in de periode van 1946 tot 1951 onderzocht, is een lopend studie-object. Nog pas in 1978, heeft Y. Ueda met inzet van computers gevonden dat dit circuit onder omstandigheden in chaos kan geraken. Deze ontdekking werd van dermate groot belang geacht dat Ueda er in 1986 het National Museum of Sciences te Parijs mee haalde. Anders dan Elias, heeft Van der Pol zijn onderzoek naar niet-lineaire trillingsverschijnselen ook steeds gepubliceerd in de internationale vakliteratuur [3]. Het samen met J. van der Mark in 1927 uitgevoerde experiment naar frequentie-deling geldt thans als het klassieke voorbeeld van wel geobserveerde, maar niet als zodanig onderkende chaos. Een overdruk van het in Nature gepubliceerde artikel is bijgevoegd. Naar algemeen oordeel, geldt Van der Pol met zijn onderzoek naar relaxatie trillingen, limit-cycles en synchronisatie thans als één van de meest prominente voorlopers op het gebied van de moderne niet-lineaire dynamica.

Dit artikel is als volgt ingedeeld. Ter tegemoetkoming aan voornamelijk 'lineair' opgeleide ingenieurs, wordt in paragraaf 2 eerst een elementaire inleiding gegeven in de niet-lineaire circuit theorie. De theorie beperkt zich uitdrukkelijk tot ruisvrije modellen (zie [4], [5] en [6] voor inleidende studieboeken, [7] is al meer geavanceerd).

Paragraaf 3 behandelt niet-lineaire, autonome circuits van de orde één (één dynamisch element). Middels het kwalitatieve begrip 'dynamische route' en het daarmee verbonden sprongverschijnsel, worden relaxatie trillingen in de autonome Van der Pol oscillator verklaard. Tevens wordt de hysteresis van de Schmitt-trigger uitgelegd als niet-lineaire parasitaire dynamica.

Het toestandsconcept wordt in paragraaf 4 geïntroduceerd. Er wordt gestart met niet-lineaire, autonome circuits van de orde twee. De oplossingen van de beschrijvende circuit vergelijkingen (hier opgevat als toestandsvergelijking) worden à la Poincaré geïnterpreteerd als baanbewegingen in de toestandsruimte (ruimte opgespannen door de toestandsvariabelen: spanningen over capaciteiten en stromen door inductiviteiten). Het toestandsbeeld geeft in één oogopslag een kwalitatief inzicht in de circuit dynamica. De daarin voorkomende geometrische objecten van aantrekking (afstoting) worden attractors genoemd. Ingezien wordt dat evenwichtpunten en limit-cycles (periodieke trillingen) de enige attractors zijn in een twee-dimensionale toestandsruimte. Voor meer complexe dynamica zijn tenminste drie vrijheidsgraden nodig. Tenslotte wordt het begrip bifurcatie geïntroduceerd als een drastische verandering van de kwalitatieve circuit dynamica.

Paragraaf 5 geeft een uiteenzetting van subharmonische en quasi-periodieke trillingen in de toestandsruimte van niet-lineaire, niet-autonome (aangedreven) circuits van de orde twee (drie vrijheidsgraden). De Van der Pol oscillator en een zogenaamd Duffing-circuit staan model. Daarin is het samenstellende, niet-lineaire element respectievelijk een actieve weerstand en een reactantie. Het circuit van Elias wordt herkend als behorende tot de tweede categorie. Een geschikt gekozen, zogenaamde Poincaré-doorsnede in een naar drie dimensies uitgebreide toestandsruimte blijkt een ingenieus hulpmiddel ter classificatie van niet-lineaire trillingsverschijnselen.

De chaotische trillingen van paragraaf 6 onderscheiden zich door een grillig verloop in de tijd te combineren met een continu frequentiespectrum. De ordening die deze trillingen niettemin vertonen, wordt weerspiegeld in de structuur van de bijbehorende chaotische attractor. De geselecteerde niet-lineaire, niet-autonome circuits van de orde twee (drie

vrijheidsgraden) illustreren hoe bij verandering van een circuit-parameter het kwalitatieve gedrag zelfs zó drastisch kan wijzigen dat chaos optreedt. Twee prototypen van zulke bifurcatiewegen naar chaos worden behandeld. Daarbij wordt ingespeeld op het bijgevoegde artikel van Van der Pol en Van der Mark uit 1927, alsook op het werk van Elias. De paragraaf wordt afgesloten door het werk van Van der Pol in historisch perspectief te plaatsen.

Paragraaf 7 geeft een beknopte uiteenzetting van de oscillator van Chua. Dit is een niet-lineair, autonoom circuit van de orde drie. Bij een juiste instelling produceert het circuit chaotische trillingen. In dat geval zorgt de interactie tussen twee instabiele evenwichtpunten voor een in zichzelf gesloten, zogenaamde homocline baan. Daarvan impliceren de baan-karakteristieken een herhaald vouw en strek mechanisme dat de onderliggende ordening van de chaotische attractor bepaalt. Men beweert dat het circuit van Chua het enige thans bestaande fysische systeem is waarbij chaotisch gedrag zowel experimenteel, numeriek als analytisch is aangetoond. Met de bijgevoegde lijst van standaard verkrijgbare componenten kan men er zelf mee experimenteren.

Tot slot worden in paragraaf 8 enige toepassingen van de theorie aangestipt.

Veel in dit artikel is ontleend aan de speciale IEEE-nummers die aan dit onderwerp zijn gewijd [8] t/m [12]. Een boeiend, en voor de leek geschreven overzicht van de moderne ontwikkelingen in de niet-lineaire dynamica door alle wetenschappen heen, is [13]. De vakliteratuur is overstelpend, en wegens het hoge wiskundige gehalte nog eens extra moeilijk toegankelijk. Als niet-wiskundige introductie zou [14] of [15] geprobeerd kunnen worden. De inleidingen [16] en [17] zijn weliswaar wiskundig maar elementair. Geavanceerder maar opvallend helder zijn [18], [19], en [20] als exponent van de Russische school.

2. NIET-LINEAIRE ELEKTRISCHE CIRCUITS

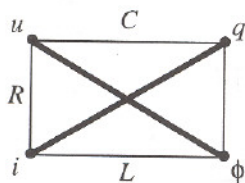
2.1 Grondslagen

Van de *basisgrootheden*: stroom i , spanning u , lading q en magnetische flux ϕ , worden de twee laatste opgevat als hulpgrootheden. Zij kunnen gerelateerd worden aan de twee eerste via de tijdsintegraties $q = \int i dt$ en $\phi = \int u dt$. De behoudswet van lading en magnetische flux gaat dan respectievelijk over in de *stroomwet* en de *spanningwet* van Kirchhoff. De gezamenlijke geldigheid van genoemde behoudswetten impliceert de *behoudswet van elektromagnetische energie* in elektrische circuits (geen ontsnappende elektromagnetische stralingsenergie).

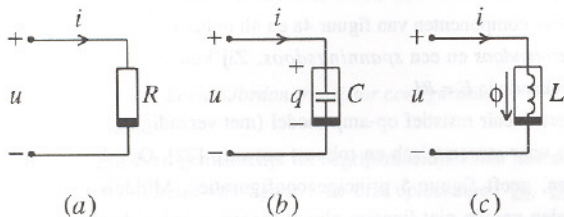
De *wetten van Kirchhoff* beschrijven de interconnecties tussen de samenstellende componenten (de *circuit structuur*). Het zijn *lineaire, algebraïsche* betrekkingen tussen respectievelijk stromen en spanningen. Samen met de u - i -relaties van de componenten bepalen zij het elektrische gedrag volledig.

Indien de optredende elektromagnetische verschijnselen tot op elementair (d.w.z. onderling niet herleidbaar) niveau worden uiteengehaald, komt men uit bij de circuit elementen (primitieven). Preciezer: een *circuit element* bepaalt op elk tijdstip een nog vrij te kiezen algebraïsche relatie (de *constitutieve relatie*) tussen twee van de vier basisgrootheden i , u , q en ϕ . (N.B. Met *algebraïsch* wordt een instantaan verband bedoeld.) Gelet op de reeds bestaande betrekkingen tussen de basisgrootheden, zijn daar vier van de zes mogelijke combinaties voor beschikbaar. De paren $\{u, i\}$, $\{q, u\}$ en $\{\phi, i\}$ staan respectievelijk voor de *weerstand* R , de *capaciteit* C en de *inductiviteit* L . Het paar $\{q, \phi\}$ definieert de zogenaamde memristor, die hier verder onbesproken blijft. Figuur 1 geeft een over-

zicht van de basisgrootheden, terwijl in figuur 2 de circuit symbolen van de (twee-klemmen) elementen staan afgebeeld.



Figuur 1. Relaties tussen de basisgrootheden.

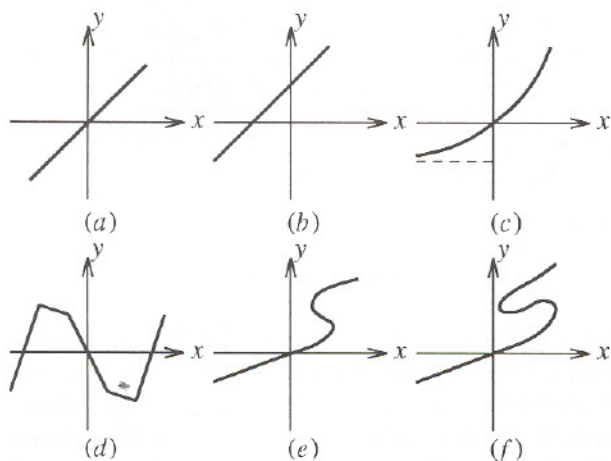


Figuur 2. Circuit symbol van de weerstand R (a), de capaciteit C (b) en de inductiviteit L (c).

2.2 Eigenschappen circuit elementen

Een element is *linear* als de constitutieve relatie een evenredigheid is. Zo niet, dan is het element *niet-linear*. Verder is een element *tijd-invariant* (autonoom) als de constitutieve relatie niet expliciet van de tijd t afhangt. Is dit juist wel zo, dan is het element *tijd-variant* (niet-autonoom). Uitgezonderd de bronnen, wordt in dit artikel steeds uitgegaan van autonome elementen.

De *karakteristiek* van een element is de grafische voorstelling van de constitutieve relatie. Figuur 3 geeft voorbeelden. Daarin zijn de symbolen x en y constituerende variabelen; in het algemeen zijn het functies van de tijd t , genoteerd als $x = x(t)$ en $y = y(t)$.



Figuur 3. Karakteristieken van elementen (x en y zijn constituerende variabelen).

Karakteristiek (a) staat voor een lineair element; de overige hebben betrekking op niet-lineaire exemplaren. Karakteristiek (b) is weliswaar een rechte, maar die gaat niet door de oorsprong (vertolkt geen

evenredigheid). Het ermee corresponderende element wordt hier *affien* genoemd. (N.B. Een affiene algebraïsche relatie heeft de vorm $y = ax + b$ met $b \neq 0$.) Het niet-lineaire element met karakteristiek (c) vertoont verzadiging. Met $x = u$ en $y = i$ stelt het een exponentiële diode voor. Karakteristiek (d) bestaat uit aaneengesloten rechte lijnsegmenten die niet alle door de oorsprong gaan; we noemen het een *stukgewijs affiene* karakteristiek.

Een element is *x-bestuurd* indien y in strikt wiskundige zin een functie is van x , genoteerd als $y = \tilde{y}(x)$. Elementen met karakteristiek (a), (b) en (c) zijn zowel x - als y -bestuurd; hun constitutieve functievoorschriften hebben alle een inverse. Het element met karakteristiek (d) is x -, maar niet y -bestuurd; $\tilde{y}$ heeft geen inverse. Bij karakteristiek (e) is dit juist andersom; daar is $x = \tilde{x}(y)$, terwijl de inverse van $\tilde{x}$ niet bestaat. Tenslotte is het niet-lineaire element met karakteristiek (f) noch x -, noch y -bestuurd.

Een (niet-lineaire) *weerstand* is *passief* als zijn karakteristiek buiten het tweede en vierde kwadrant blijft. In laatstgenoemde kwadranten is het toegevoerde vermogen $p = ui < 0$, hetgeen de weerstand *actief* maakt (voor een weerstand is $x = u$, $y = i$). Weerstanden met karakteristiek (b) en (d) zijn actief, de overige zijn passief. Een actieve weerstand bevat een interne batterij (zie verderop). Realistische weerstandskarakteristieken liggen voor voldoende grote waarden van i en u steeds in het eerste en vierde kwadrant (vertonen voor die waarden een passief gedrag).

Een saillante observatie is dat de onafhankelijke bronnen met variërende sterkte kunnen worden opgevat als tijd-variante, niet-lineaire *weerstand*en. Hun karakteristiek is op elk tijdstip een niet door de oorsprong gaande rechte, evenwijdig aan één van de assen in het u - i -vlak. Volgens deze visie is een stroom(spannings)bron een spannings(stroom)-bestuurde affiene weerstand.

Weerstand en waarvan de karakteristiek delen met een negatieve helling vertoont, overeenkomend met een negatieve differentiaal weerstand, heten *negatieve resistentie* elementen.

Indien de karakteristiek (geen) symmetrie t.o.v. de oorsprong vertoont, is het element (*niet*-) *symmetrisch*. Bij niet-symmetrische elementen moet er onderscheid worden gemaakt tussen de klemmen; vandaar het zwarte balkje in de circuit symbolen van figuur 2 (vergelijk het standaard symbool van de diode en de batterij). Alleen bij symmetrische elementen is het balkje overbodig (vergelijk de karakteristieken van figuur 3a en 3d).

De u - i -relatie van de weerstand is identiek aan de constitutieve relatie ervan. Het is een instantaan reagerend of *statisch* element. De u - i -relaties van de capaciteit en de inductiviteit worden verkregen door respectievelijk $q = \int i dt$ en $\phi = \int u dt$ in de (algebraïsche) constitutieve relaties te substitueren. De resulterende tijdsintegraties in hun u - i -relaties maakt ze tot *dynamische* elementen. Er volgt dat de bovengrens van hun dynamiek wordt gegeven door de *continuïteitsregel*, die stelt dat de spanning over een al dan niet lineaire C (de stroom door een L) niet kan springen zolang de stroom erdoor (de spanning erover) geen stoot bevat. Onder *statische condities* gedragen de capaciteit en de inductiviteit zich respectievelijk als een open klemmenpaar en een kortsluiting.

De elementen van figuur 2 zijn een ruw model van respectievelijk een materiële weerstand (waaronder een gevarieerd assortiment van resistieve halfgeleider bouwstenen), condensator en spoel. In die zin zijn het idealisaties van de werkelijkheid. (N.B. Metingen aan negatieve resistentie elementen dienen behoedzaam te geschieden. De invloed van inherente *parasitaire effecten* kan de metingen gemakkelijk laten mislukken [21].)

Ofschoon bovenstaande bespreking zich toespitste op twee-klemmen elementen, vallen *meer-klemmen* elementen eveneens binnen de theorie. De scalaire constitutieve relaties worden daartoe vervangen door vectoriële algebraïsche relaties. Hiermee kan een *transistor* (van 'transfer resistor') en een *operationele versterker* (op-amp) in eerste aanleg worden gemodelleerd door respectievelijk een (niet-lineaire) drie- en vier-klemmen *weerstand*.

2.3 Circuit vergelijkingen

Nadat de elektromagnetische verschijnselen die zich in een materieel circuit voordoen, zijn vertolkt door circuit elementen (inclusief de relevante parasitaire effecten) wordt er een *model* verkregen, dat eveneens een elektrisch circuit wordt genoemd. De hierin optredende (tijdsafhankelijke) spanningen en stromen worden bepaald door de *circuit vergelijkingen*. Deze bestaan uit een blok *Kirchhoff-vergelijkingen*, aangevuld met een blok *u-i-relaties*, afkomstig van de samenstellende elementen. Ter verkrijging van een kleiner stelsel circuit vergelijkingen worden de *u-i-relaties* en de Kirchhoff-vergelijkingen in elkaar gesubstitueerd.

Daar de Kirchhoff-vergelijkingen lineair zijn, komen de eventuele niet-lineariteiten *exclusief* voort uit de *u-i-relaties* (daarbij de elektromagnetische materiaal eigenschappen van de materiële bouwstenen in rekening brengend).

In dit artikel worden de bouwstenen *ruisvrij* verondersteld. Dit voert tot *deterministische* circuit modellen. De tijdsafhankelijke uitkomsten kunnen derhalve nimmer onderhevig zijn aan het toeval.

Een circuit heet *niet-lineair* indien het circuit naast de onafhankelijke bron(nen) tenminste één niet-lineair element bevat.

De constructieregels voor (planaire) *duale* circuits zijn voor lineaire en niet-lineaire circuits gelijk. De karakteristieken van de duale elementen ontstaan door verwisseling van q en ϕ , alsmede van u en i . Daarbij gaat een capaciteit over in een inductiviteit met dezelfde (al dan niet-lineaire) karakteristiek, en andersom. Het dual van een spanning(stroom)-bestuurde weerstand is een stroom (spannings)-bestuurde weerstand.

Circuits die naast bronnen uitsluitend bestaan uit (al dan niet-lineaire, en mogelijkkerwijs meer-klemmen) weerstanden heten *resistieve circuits*. Indien het circuit tenminste één dynamisch element bevat, heet het een (al dan niet-lineair) *dynamisch circuit*. Een dynamisch circuit heet *autonoom* indien de samenstellende elementen (inclusief de onafhankelijke bronnen) alle tijd-invariant zijn. Zodra tenminste één onafhankelijke bron met variërende sterkte is opgenomen, heet het circuit *niet-autonoom*.

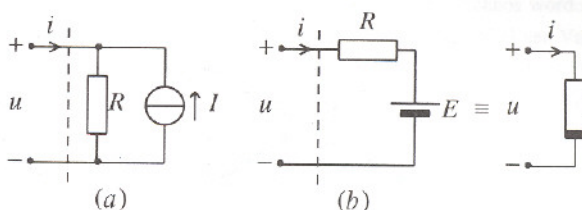
Resistieve circuits geven aanleiding tot (al dan niet-lineaire) *algebraïsche* circuit vergelijkingen. Dynamische circuits resulteren in (al dan niet-lineaire) *differentiaal* vergelijkingen.

Het oplossen van de circuit vergelijkingen stuit bij niet-lineaire circuits op extra moeilijkheden. Bovendien wordt het *inzicht* in de eigenschappen van die oplossingen sterk bemoeilijkt doordat met name het superpositie beginsel het laat afweten (en waardoor het centrale impedantie concept van de lineaire theorie eveneens op losse schroeven komt te staan).

Uiteindelijk beslissen *metingen* aan het materiële circuit over de geldigheid van op zichzelf correcte *berekeningen* aan het model circuit.

2.4 Niet-lineaire resistieve componenten

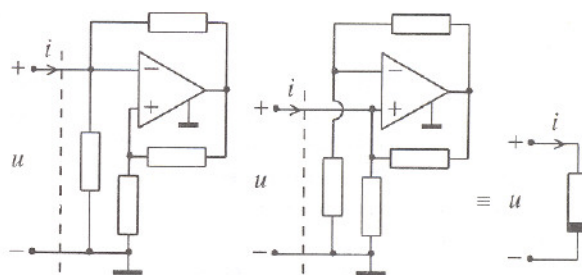
Het combineren van afzonderlijke resistieve elementen tot een enkele component, levert een scala van niet-lineaire weerstandskarakteristieken op. De standaard combinaties van figuur 4 gelden als elementaire voorbeelden. Zij hebben de affiene *u-i*-karakteristiek van figuur 3b.



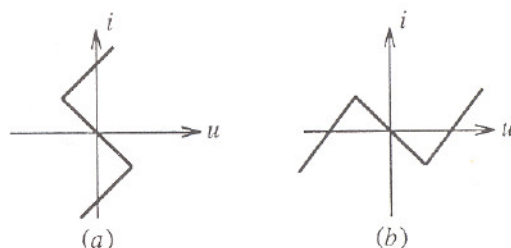
Figuur 4. Stroomdoos (a) en spanningsdoos (b).

Ter onderscheid van een (ideale)stroom/spanningsbron noemen we de resistieve componenten van figuur 4a en 4b in het vervolg respectievelijk een *stroomdoos* en een *spanningsdoos*. Zij kunnen in elkaar worden omgerekend via $E = RI$.

Een niet-lineair resistief op-amp model (met verzadiging) leent zich bij uitstek voor systematisch en robuust ontwerp [22]. Om de gedachte te bepalen, geeft figuur 5 principe configuraties. Middels elementaire methoden van de niet-lineaire circuit theorie worden daarbij de stuks-gewijs affiene *u-i*-karakteristieken van figuur 6 gevonden.



Figuur 5. Niet-lineaire resistieve op-amp configuraties.

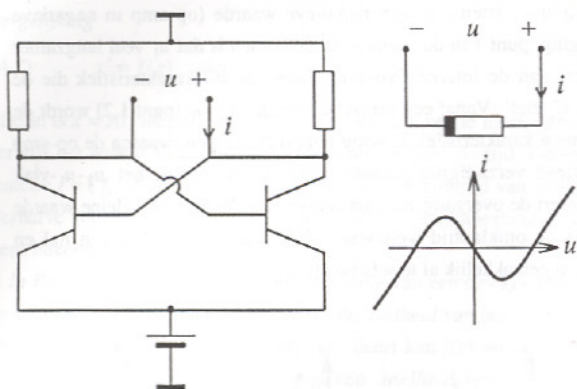


Figuur 6. *u-i*-karakteristieken behorend bij figuur 5.

Genoemde componenten zijn alle actief; steeds bevatten zij een interne batterij (de niet weergegeven voedingsbatterijen van de op-amp). Dezelfde eigenschappen kunnen worden gerealiseerd met transistor combinaties. In figuur 7 staat een klassiek voorbeeld. Door voor elke transistor een Ebers-Moll model te nemen, en de daarin voorkomende exponentiële dioden te vervangen door ideale exemplaren, kan een benaderde *u-i*-karakteristiek betrekkelijk eenvoudig worden berekend.

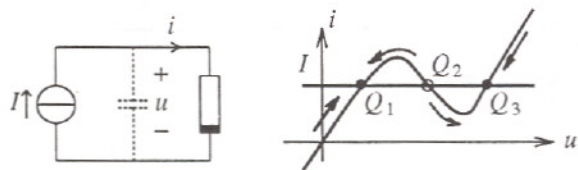
2.5 Meerdere oplossingen

Niet-lineaire resistieve circuits kunnen gemakkelijk meerdere discrete oplossingen hebben. Vaak is dat juist ook de bedoeling, zoals bij geheugen circuits. Is men evenwel gewend 'lineair' te denken, dan kan



Figuur 7. Eccles-Jordan transistor configuratie.

deze mogelijkheid even gemakkelijk tot begripsmoeilijkheden leiden. Zo heeft het resistieve circuit van figuur 8 de drie oplossingen Q_1 , Q_2 en Q_3 . Vanuit fysisch oogpunt gezien, kunnen deze natuurlijk niet gelijktijdig optreden. Het intellectuele ongemak wordt weggenomen indien er een *parasitaire* capaciteit (gestippeld weergegeven) wordt toegevoegd, waarna een niet-lineair autonoom *dynamisch* circuit ontstaat.



Figuur 8. De parasitaire capaciteit maakt het model volledig.

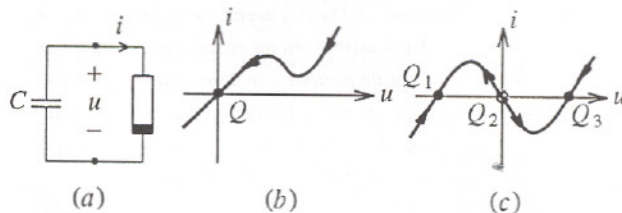
Gerekend vanaf een zeker begintijdstip, zal de capaciteit zich gedurig ont(op)laden, waarna het circuit uiteindelijk in de statische evenwichtstoestand geraakt. En, omdat de capaciteit zich onder statische condities als een open klemmenpaar gedraagt, resteert na enige tijd het oorspronkelijke resistieve circuit. Q_1 , Q_2 en Q_3 kunnen nu worden geïnterpreteerd als de drie *mogelijke* oplossingen van het volledige model met parasiet. Een verdere analyse van het dynamische gedrag leert dat Q_1 en Q_3 de enige stabiele evenwichtspunten zijn. De theoretische oplossing Q_2 blijkt instabiel, en is derhalve *experimenteel niet waarneembaar*. In welke van de twee stabiele punten het circuit zich zal nestelen, hangt af van de *beginspanning* over de parasiet.

3. NIET-LINEAIRE DYNAMICA

3.1 Dynamische route

In figuur 9a staat een niet-lineair, autonoom dynamisch circuit van de orde één (één dynamisch element). De dynamica ervan wordt enerzijds bepaald door de u - i -relatie van de weerstand, en anderzijds door die van de capaciteit, hier $i = -C du/dt$. Dus, voor een punt op de u - i -karakteristiek geldt: zolang $i > 0$ (< 0) neemt u af (toe), resulterend in de *dynamische route* van het circuit; zie figuur 9b en 9c voor een *spanningsbestuurde* niet-lineaire weerstand. De dynamische route biedt *kwalitatief* inzicht in de dynamica. (N.B. Indien de niet-lineaire weerstandskarakteristiek in voldoende goede benadering kan worden vervangen door

een stuksgewijs affien exemplaar, kunnen tevens *kwantitatieve* uitkomsten worden verkregen. Door elk samenstellend lijnsegment van de stuksgewijs affiene karakteristiek op te vatten als de affiene karakteristiek van een stroom- of spanningsdoos, kan bovendien worden gewerkt met een inzichtelijke circuit interpretatie.)

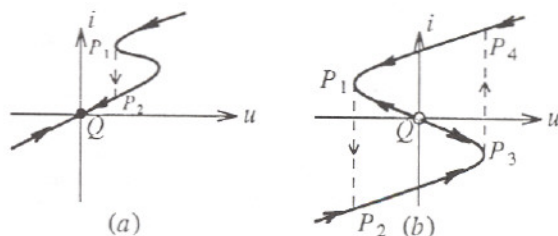


Figuur 9. Dynamisch circuit van de orde één (a) met dynamische route langs spanningsbestuurde u - i -karakteristiek (b) en (c).

In figuur 9b is Q een *stabiel* evenwichtspunt, overeenkomend met een lokaal *positieve* helling van de u - i -karakteristiek. Om dezelfde reden zijn Q_1 en Q_3 in figuur 9c beide stabiel, terwijl Q_2 daarentegen *instabiel* is (lokaal *negatieve* helling van de u - i -karakteristiek).

Het *bistabiele* circuit van figuur 9c wordt een *sequentieel geheugen* element (*flip-flop*) als er parallel aan de niet-lineaire weerstand van figuur 9a een stroombron wordt aangesloten die een trigger puls afgeeft (vergelijk het Eccles-Jordan paar van figuur 7). Als gevolg hiervan wordt de u - i -karakteristiek gedurende de puls evenwijdig aan zichzelf naar boven of naar beneden verplaatst, al naar gelang de bron een positieve of negatieve puls afgeeft. Aldus bewerkstelligt het triggersignaal bij voldoende grote pulsduur en pulshoogte een dynamische overgang van het ene stabiele evenwichtspunt naar het andere, en vice versa.

Er gelden extra overwegingen als de niet-lineaire weerstand in het circuit van figuur 9a *stroombestuurd* is, en *bovendien* geen spanningsbestuurde representatie toelaat (geen inverse heeft).



Figuur 10. Het *sprongverschijnsel* haalt het circuit uit de *impassepunten* P_1 en P_3 .

Zodra in figuur 10a het punt P_1 wordt bereikt, treedt een *impasse* op: enerzijds kan een bewegend punt zijn weg langs de u - i -karakteristiek niet vervolgen, noch kan het op zijn schreden terugkeren ($i > 0$, u moet afnemen), terwijl het er anderzijds ook niet kan blijven liggen (dan zou de spanning over de capaciteit constant zijn, waarbij $i = 0$ behoort). De enige weg uit de *impasse* is om een *vertikale, instantane sprong* naar P_2 te maken, waarna de route naar het stabiele evenwichtspunt Q kan worden vervolgd. Dit *sprongverschijnsel* wordt fysisch bevredigend verklaard als er een extra *parasitaire serie inductiviteit* in het circuit wordt opgenomen. Dan wordt op grond van de eerder genoemde continuïteitsregel de stroom door de (kleine) serie inductiviteit ervan

weergehouden instantaan te springen. Aldus ontstaat er enige, doch verder te verwaarlozen vertraging in de overgang van P_1 naar P_2 . (N.B. Alléén een *verticale* sprong is consistent met de continuïteitsregel voor de *capaciteit*.)

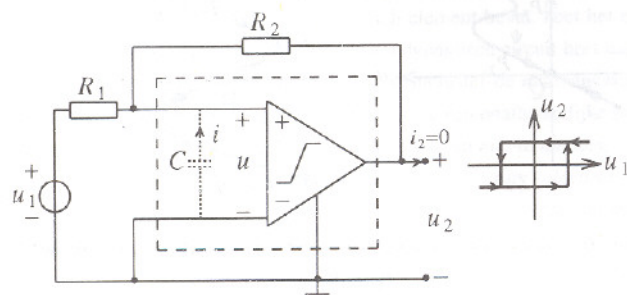
In figuur 10b zijn de sprongen onderdeel van een permanente, *periodieke* beweging die energetisch wordt onderhouden door de *actieve* niet-lineaire weerstand (interne batterij). Daarbij neemt $i = i(t)$ tussen P_4 en P_1 (P_2 en P_3) slechts geleidelijk af(toe) om op gezette tijden plotseling van waarde te veranderen. Daar de *periode* van deze trilling in essentie wordt bepaald door een *tijdconstante* (relaxatietijd), en niet door de trillingstijd van een *LC*-kring, heeft Van der Pol er de nu algemeen geaccepteerde naam *relaxatietrilling* voor bedacht [1d, e, f].

Zoals hierboven uiteengezet, krijgen de abrupte overgangen een fysische onderbouwing door een extra *parasitaire* serie *L* aan het *RC*-circuit van figuur 9a toe te voegen. De circuit vergelijkingen van het aldus gecompleteerde niet-lineaire *RLC*-circuit zijn voor het eerst door Van der Pol onderzocht. Voor een *kleine* waarde van de parasiet vond hij inderdaad de relaxatietrilling van hierboven. Met dezelfde aanname bleek hij eveneens in staat de werking van de *multivibrator* van Abraham en Bloch een fysische grondslag te geven, en stelde hij voor de *harts* als relaxatieverschijnsel op te vatten [1e] (een schot in de roos, naar achteraf bleek [23]).

Van der Pol heeft de naar hem vernoemde circuit vergelijkingen oorspronkelijk opgesteld voor een meegekoppelde *triodebuis-oscillator* met *parallel LC*-kring [1a]. Daarin komt de invloed van de triodebuis naar voren als de *duale* niet-lineaire weerstandskarakteristiek van figuur 10b, parallel aan de *LC*-kring. Met verwijzing naar het dualiteitsbeginsel, wordt op grond van het bovenstaande meteen ingezien dat de triodebuis oscillator eveneens een relaxatietrilling kan produceren als de condensator wordt weggelaten, om naar het idee van Van der Pol te worden opgevat als *parasitaire* bedradingscapaciteit [1e].

3.2 Hysterese

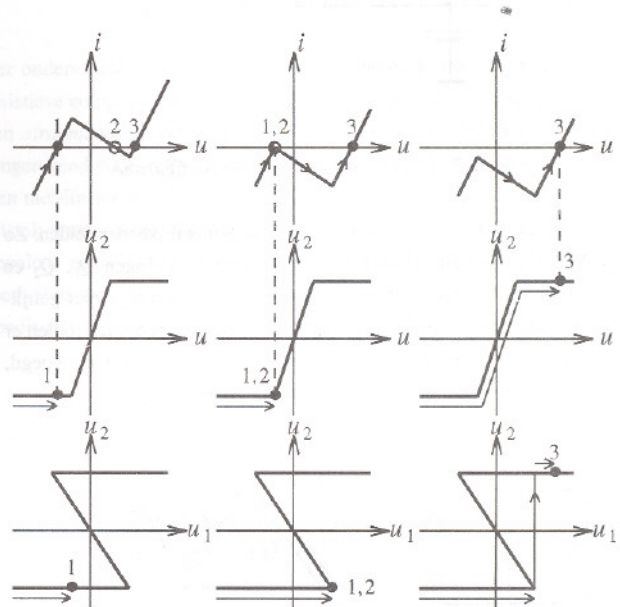
In figuur 11 wordt een *Schmitt-trigger* gerealiseerd met een meegekoppelde op-amp met verzadiging.



Figuur 11. De extra parasitaire capaciteit C verklaart de hysterese van de *Schmitt-trigger* als een niet-lineair dynamisch verschijnsel.

Zonder de gestippeld weergegeven capaciteit is het circuit van figuur 11 zuiver resistent, en kan derhalve onmogelijk abrupte sprongen vertonen als $u_1 = u_1(t)$ daar vrij van is. De *hysterese* van de materiële *Schmitt-trigger* blijft daarmee echter geheel onverklaard. Het dilemma wordt opgelost door de capaciteit C als *parasiet* aan het niet-lineaire op-amp model toe te voegen, waarna de hysterese als een *niet-lineair dynamisch* verschijnsel kan worden uitgelegd [24].

Figuur 12 geeft een overzicht voor toenemende waarden van de ingangsspanning u_1 , startend bij een negatieve waarde (op-amp in negatieve verzadiging; punt 1 in de figuur). Aangenomen is dat u_1 veel langzamer verandert dan de interne dynamica langs de *u-i*-karakteristiek die de parasiet C 'ziet'. Vanaf een kritische waarde van u_1 (punt 1,2) wordt de u_2 -versus- u karakteristiek in hoog tempo doorlopen, waarna de op-amp in positieve verzadiging geraakt (punt 3). Alleen in het u_2 - u_1 -vlak manifesteert de overgang zich als een sprong. Wegens de kleine waarde van C is de omkloptijd weliswaar klein, maar *niet* gelijk aan nul en bovendien gemakkelijk af te schatten [24].

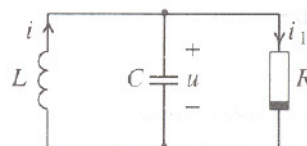


Figuur 12. De hysterese van de *Smitt-trigger* als niet-lineair dynamisch verschijnsel in kaart gebracht.

4. NIET-LINEAIRE DYNAMICA IN TOESTANDSRUIMTE

4.1 Toestandsvergelijkingen

Het *autonome*, niet-lineaire dynamische circuit van figuur 13 is van de *orde twee* (twee dynamische elementen). De *u-i*-relatie van de weerstand is gegeven als $i_1 = \bar{i}(u)$. De stroom $i = i(t)$ door de inductiviteit en de spanning $u = u(t)$ over de capaciteit worden elk opgevat als een *toestandsvariabele*. Tezamen bepalen zij de opgeslagen elektromagnetische energie, en daarmee de *toestand* van het circuit ten tijde t .



Figuur 13. De toestandsvariabelen zijn i en u .

Vanaf een gegeven *begintoestand* (i_0, u_0) op het begintijdstip t_0 wordt de evolutie van de toestand beschreven door de circuit vergelijkingen

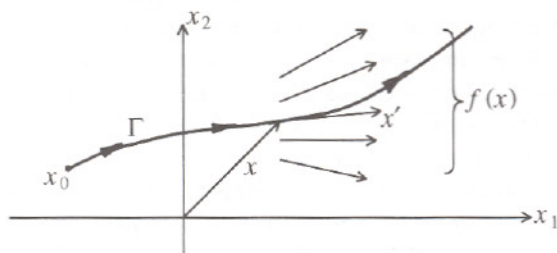
$$(4.1) \quad \begin{cases} i' = -L^{-1}u & (a) \\ u' = C^{-1}i - C^{-1}\bar{i}(u) & (b) \end{cases}$$

of, in standaardvorm, door de niet-lineaire autonome toestandsvergelijking

$$(4.2) \quad x' = f(x) \quad \text{met} \quad x(t_0) = x_0$$

Hierin is $x = x(t)$ met $x = (x_1, x_2) = (i, u)$ de onbekende toestandsvector, terwijl het accent staat voor een differentiatie naar de tijd. De vectorfunctie $f = (f_1, f_2)$ is gedefinieerd volgens het rechterlid van (4.1) en is derhalve voor elke toestand x bekend, terwijl de begintoestand x_0 eveneens bekend is.

À la Poincaré wordt x opgevat als de positie van een bewegend punt in de toestandsruimte (x_1, x_2) . Dan is x' de snelheid van dat punt die met (4.2) juist gegeven is door $f(x)$. Op zijn beurt kan $f(x)$ op vaste punten worden weergegeven als een gegeven snelheidsveld (vectorveld). Volgens deze voorstelling manifesteert de oplossing $x = x(t)$ van (4.2) zich als een door de tijd gecoördineerde baankromme (een trajectorie) in de toestandsruimte, startend bij x_0 en tangentieel aan het snelheidsveld (met (4.2) is $dx_2/dx_1 = f_2/f_1$); zie figuur 14.



Figuur 14. Trajectorie Γ en snelheidsveld $f(x)$.

Voor verschillende begintoestanden produceert (4.2) een familie van trajectoriën in de toestandsruimte. Zo'n toestandsbeeld geeft een compleet overzicht van de kwalitatieve dynamica van het circuit. Kwalitatief, omdat alleen het globale verloop van x in de tijd kan worden gevolgd; kwantitatieve waarden van x op het tijdstip t kunnen er niet van worden afgeleid.

In het toestandsbeeld van autonome circuits kunnen de trajectoriën elkaar niet snijden ($f(x)$ heeft voor elke x precies één beeldpunt x'). In de praktijk wordt het toestandsbeeld verkregen door (4.2) voor een spectrum van begintoestanden numeriek te integreren.

4.2 Evenwichtspunten

Een punt $x = x_Q$ in de toestandsruimte is een evenwichtspunt (een dc-oplossing) als zijn snelheid gelijk is aan nul, dus $f(x_Q) = 0$ in (4.2). Inzicht in het lokale gedrag nabij x_Q wordt verkregen door een linearisering van (4.2) ter plaatse van x_Q toe te passen (het klein-signaal gedrag rondom het instelpunt). Voor een kleine afwijking x van x_Q leidt dit tot de lineaire, autonome toestandsvergelijking

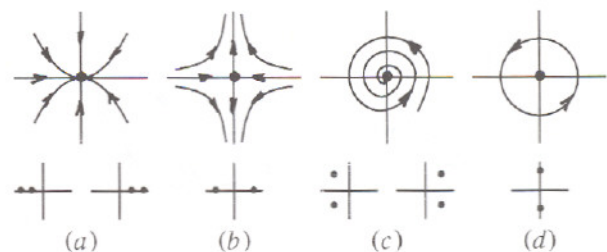
$$(4.3) \quad x' = Ax$$

waarin A de Jacobi-matrix is van $f(x)$ voor $x = x_Q$ (via een Taylor-ontwikkeling verkregen als de eerste afgeleide van f naar x). Oplossingen van (4.3) zijn lineaire combinaties van de exponentiële tijdfuncties $\exp(\lambda t)$, waarvan de eigenwaarden λ volgen uit de karakteristieke vergelijking

$$(4.4) \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

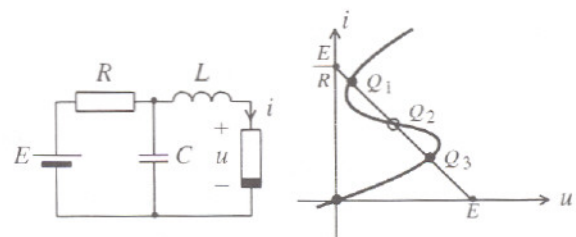
met I de eenheidsmatrix.

Een evenwichtspunt x_Q is stabiel indien $\text{Re}(\lambda) < 0$ voor alle λ 's, en is dan tevens een positieve attractor (punt van aantrekking). Als $\text{Re}(\lambda) > 0$ voor tenminste één λ is x_Q instabiel. Indien $\text{Re}(\lambda) > 0$ voor alle λ 's is x_Q een negatieve attractor (punt van afstoting). Voorts kunnen er voor twee verschillende λ 's vier mogelijkheden worden onderscheiden (classificatie volgens Poincaré): (a) de λ 's zijn beide reëel met hetzelfde teken, (b) als (a) maar met verschillend teken, (c) ze zijn complex geconjugueerd met $\text{Re}(\lambda) \neq 0$, (d) als (c) maar zuiver imaginair. De ermee corresponderende evenwichtspunten heten respectievelijk een knoop-, zadel-, spiraal- en centrumpunt. Figuur 15 geeft een overzicht van de lokale toestandsbeelden (van de knoop en het spiraalpunt zijn alleen de stabiele versies weergegeven). Zij worden verkregen door eerst een lokale assen-transformatie toe te passen, en daarna de tijd uit de lineaire combinaties van de exponentiële tijdfuncties te elimineren.



Figuur 15. Knoop (a), zadel (b), spiraal (c) en centrum (d).

Anders dan het circuit van figuur 13, dat slechts één evenwichtspunt heeft (zie verderop), belooft het autonome circuit van figuur 16 er drie. Zij worden gevonden door de C en de L respectievelijk te vervangen door een open klemmenpaar en een kortsluiting (statische condities).



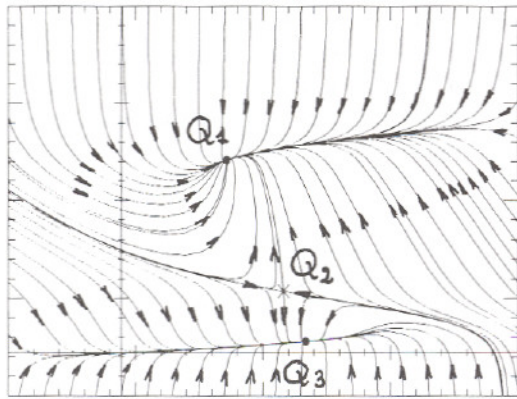
Figuur 16. Autonoom circuit met evenwichtspunten Q_1 , Q_2 en Q_3 .

In figuur 17 staat een computer-gesimuleerd toestandsbeeld. De figuur geeft in één oogopslag een compleet overzicht van de globale kwalitatieve dynamica van het circuit. Lokaal worden Q_1 en Q_3 herkend als stabiele knopen en Q_2 als zadel (een zadel is instabiel, en derhalve experimenteel niet waarneembaar). De door Q_2 aangetrokken trajectoriën delen de toestandsruimte op in twee gescheiden gebieden die elk een attractiepunten insluiten. Die gebieden zijn attractiegebieden met een separatrix als scheidslijn (in figuur 17 van links midden naar rechts onder).

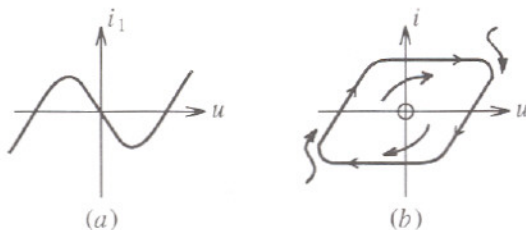
4.3 Limit-cycles

Figuur 18a specificeert de u - i -karakteristiek van de weerstand in het RLC-circuit van figuur 13.

Met (4.1) is de oorsprong van de toestandsruimte het enige evenwichtspunt dat volgens (4.4) bovendien instabiel blijkt. Dit laatste is ook direct in te zien als wordt bedacht dat de differentiaal resistentie ter plekke



Figuur 17. Toestandsbeeld van het circuit in figuur 16.



Figuur 18. Met u - i -karakteristiek (a) heeft het RLC-circuit van figuur 13 een limit-cycle (b).

negatief is. Ook voor andere lokaties in de toestandsruimte corresponderen punten met een negatieve of positieve differentiaal resistentie respectievelijk met expanderende of samentrekkende trajectoriën. En, omdat de trajectoriën elkaar niet kunnen snijden, is er rondom de instabiele oorsprong een *gesloten baan* waarnaar alle trajectoriën voor $t \rightarrow \infty$ convergeren (figuur 18b). Kennelijk is deze *limit-cycle* een *attractor* met de gehele toestandsruimte, uitgezonderd de oorsprong, als attractiegebied. Startend vanuit een willekeurige begintoestand, ontstaat er na enige aanlooptijd steeds een *periodieke trilling*.

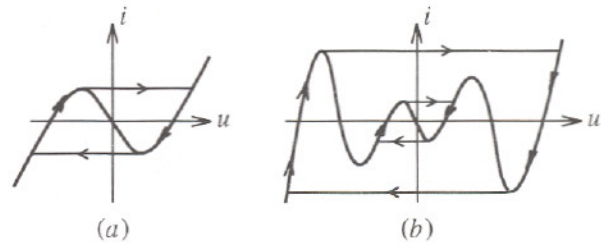
Het zojuist besproken circuit modelleert de eerder genoemde triodebuis-oscillator (de autonome *Van der Pol oscillator*) als de u - i -karakteristiek van figuur 18 in navolging van Van der Pol wordt gepreciseerd door $i_1 = \tilde{i}(u) = -u + \frac{1}{3}u^3$ (invloed van meegekoppelde triodebuis op LC-parallelkring). Substitutie van (4.1a) in de naar de tijd gedifferentieerde vergelijking (4.1b), voert dan vanzelf tot de *autonome Van der Pol-vergelijking*

$$(4.5) \quad u'' + \epsilon(u^2 - 1)u' + u = 0 \quad \text{met} \quad \epsilon = \sqrt{L/C}$$

(RLC-parallelkring),

waarin intussen is overgegaan op de nieuwe tijdvariabele $\tau = \omega_0 t$, met $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$.

Voor $\epsilon \ll 1$ kan de middelste term in (4.5) (de *niet-lineaire dempings-term*) worden verwaarloosd, resulterend in een ongedempte *harmonische trilling*, en waarmee een *elliptische limit-cycle* correspondeert. Het andere uiterste $\epsilon \gg 1$ heeft betrekking op een niet-lineaire RLC-parallelkring met kleine capaciteit, en waarvoor eerder werd betoogd dat het een *relaxatietrilling* uitvoert. Voor alsmat toenemende waarden van ϵ (kleinere capaciteiten) tendert de *limit-cycle* uiteindelijk naar de *dynamische route* van het circuit zonder capaciteit (figuur 19a).



Figuur 19. Limit-cycles voor $\epsilon \rightarrow \infty$.

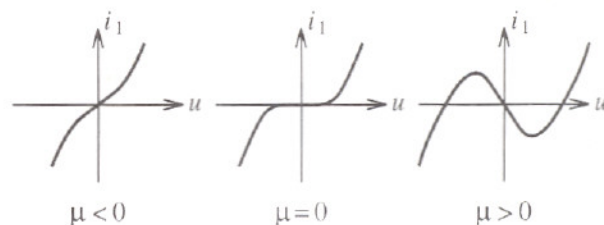
Nu is ook duidelijk dat het autonome RLC-circuit *meerdere* limit-cycles kan hebben, zie figuur 19b. Naar welke limit-cycle de trajectoriën worden aangezogen, hangt af van de *begintoestand*.

Limit-cycles kunnen alléén optreden in *niet-lineaire* dynamische circuits (N.B. Het centrumpunt van figuur 15 is géén limit-cycle.) Naast evenwichtspunten zijn limit-cycles de *enige* attractors in *autonome* circuits van de *orde twee* (onmiddellijk gevolg van de omstandigheid dat de trajectoriën in de twee-dimensionale toestandsruimte elkaar niet snijden). Historisch gaat het begrip limit-cycle terug tot H. Poincaré [25]. Voor Lord Rayleigh (eerder door het leven gaand als J.W. Strutt) was het een vanzelfsprekend concept in zijn studie van geluidstrillingen [26]. Het was B. van der Pol die limit-cycles voor het eerst productief associeerde met elektronische oscillators [1d]. Nadien is het toestandsconcept bij de behandeling van oscillators enigszins uit beeld geraakt. In plaats daarvan ziet men beschouwingen in het frequentie-domein die niet uitblinken door hun conceptuele helderheid (criterium van Barkhausen). Met de huidige opmars van computers kunnen berekeningen in de toestandsruimte steeds beter concurreren met die in het frequentie-domein [27].

4.4 Structurele stabiliteit

Het dynamische gedrag van een *structureel stabiel* circuit blijft in essentie ongewijzigd bij kleine veranderingen van de *circuit-parameters*. Het niet-lineaire RLC-circuit van hierboven staat model. Daarbij is de precieze vorm van de u - i -karakteristiek in figuur 18a van ondergeschikt belang. Zolang de *globale* vorm maar behouden blijft, genereert het circuit steeds een periodieke trilling (limit-cycle).

In figuur 20 worden de *kwalitatieve* eigenschappen van de toegepaste weerstand in het RLC-circuit afhankelijk gesteld van de parameter μ . Toenemende waarden van μ moeten een continue overgang van een passieve naar een actieve weerstand verbeelden (bijvoorbeeld teweeggebracht door het geleidelijk opvoeren van een interne batterijspanning).



Figuur 20. Geparameteriseerde u - i -karakteristiek.

Voor $\mu < 0$ is het evenwichtspunt in de toestandsruimte *stabiel* (gedempte trillingen) en voor $\mu > 0$ *instabiel*. De waarde $\mu = 0$ correspondeert met een *centrumpunt* (*harmonische oscillator*). Bij een geleidelijke toename van μ ondergaat het evenwichtspunt naar men zegt een *bifurcatie* (vertakking), gepaard gaande met de creatie van een limit-

cycle. Deze drastische gedragsverandering is typerend voor een *Hopf-bifurcatie*. Het RLC-circuit is *structureel instabiel* onder de *bifurcatie-parameter* μ ; het *bifurcatiepunt* treedt op bij $\mu = 0$.

De Schmitt-trigger van hiervoor manifesteert een ander type bifurcatie. Bij toenemende ingangsspanning u_1 gaat een stabiele knoop eerst samen-vallen met een instabiele, uitmondend in een zadel, om daarna abrupt te verdwijnen (zie de dynamische route van figuur 12). Dit is een *zadel-knoop bifurcatie* met u_1 als bifurcatie-parameter (zie verderop voor meer).

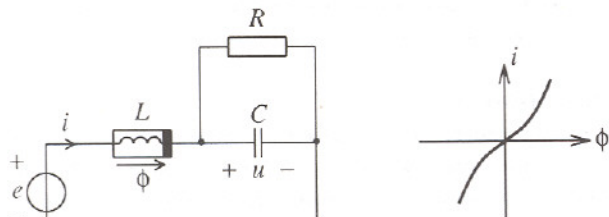
5. NIET-AUTONOME CIRCUITS

Het stationaire gedrag van autonome circuits van de orde twee is beperkt tot evenwichtspunten en periodieke trillingen. Voor meer complex gedrag zijn *drie vrijheidsgraden* nodig. Zulke circuits zijn ofwel *niet-autonoom* en van de orde twee, ofwel *autonoom* en van de orde drie. Het zijn de *eenvoudigste* circuits waar zogenaamde *chaotische*, zeer complexe trillingsverschijnselen kunnen worden verwacht.

Anders dan lineaire circuits, kunnen *niet-lineaire* circuits ook *super-* en *subharmonische* trillingen genereren. Zelfs *quasi-periodieke* trillingen vallen binnen de klassieke context (pre-chaos periode). Hieronder worden deze trillingsverschijnselen als *toestandsgedrag* opgevat.

5.1 Subharmonische trillingen

Het niet-autonome RLC-circuit van figuur 21 is van de orde twee. Het staat onder *harmonisch regime* met frequentie ω en verkeert in *stationair bedrijf*.



Figuur 21. Niet-autonoom circuit in stationair bedrijf onder het regime $e = E \cos(\omega t)$.

Met de spanning u over de C en de flux ϕ door de L als de twee *toestandsvariabelen*, kunnen de circuit vergelijkingen worden genoteerd als

$$(5.1) \quad \begin{cases} u' = -\frac{1}{RC}u + \frac{1}{C}\tilde{i}(\phi) & (a) \\ \phi' = -u & +e \quad (b) \end{cases}$$

waarin $\tilde{i}(\phi)$ de flux-bestuurde voorstelling van de inductiviteit is, terwijl $e = E \cos(\omega t)$. In standaardvorm laat (5.1) zich lezen als de niet-lineaire, niet-autonome toestandsvergelijking

$$(5.2) \quad x' = f(x, t) \quad \text{met} \quad x(t_0) = x_0$$

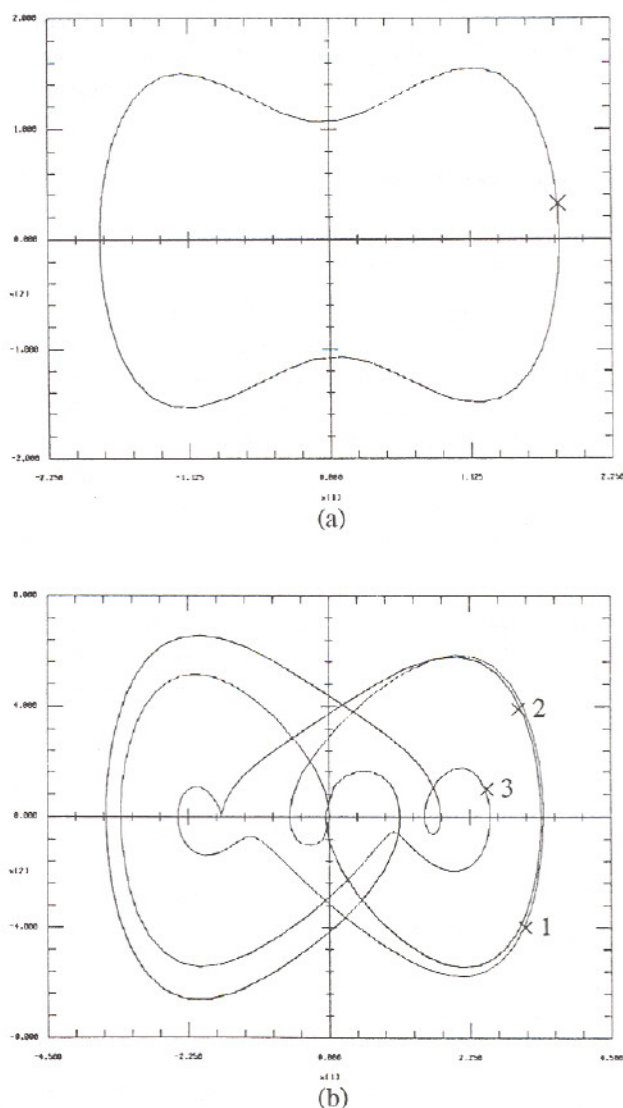
Anders dan in de autonome variant (4.2), komt de tijd t via $e = e(t)$ nu *expliciet* voor. Het onmiddellijke gevolg is dat de trajectoriën in de tweedimensionale toestandsruimte *elkaar kunnen snijden* (er is immers niets dat zich verzet tegen $f(x, t_1) \neq f(x, t_2)$ voor $x = y$).

Eliminatie van u uit (5.1) geeft na enige herleiding

$$(5.3) \quad \phi'' + k\phi' + \alpha \tilde{i}(\phi) = B \cos \tau$$

waarin is overgegaan op de nieuwe tijdvariabele $\tau = (\omega t - \arctg k)$ met $k = (\omega RC)^{-1}$, terwijl $\alpha = kR/\omega$ en $B^2 = (E/\omega)^2(1 + k^2)$.

Naar algemeen wordt aangenomen heeft G. Duffing de eigenschappen van deze niet-lineaire differentiaal vergelijking voor het eerst bestudeerd (in de context van mechanische trillingen [28]). Met $\alpha \tilde{i}(\phi) = a\phi + b\phi^3$ heet (5.3) de *niet-autonome vergelijking van Duffing*. Daarvan is bekend dat er subharmonische oplossingen mogelijk zijn. (Met ω als opgelegde frequentie heeft de k -de subharmonische de grondfrequentie ω/k ($k = 2, 3, \dots$)). Figuur 22 toont computer-gesimuleerde resultaten (de kruisjes worden later toegelicht). Superharmonische trillingen (met frequentie $k\omega$) leveren in dit verband geen nieuwe gezichtspunten op, en worden derhalve overgeslagen.



Figuur 22. Stationaire oplossing van de Duffing-vergelijking $\phi'' + 0.1\phi' + \phi^3 = B \cos \tau$ met $x[1] = \phi$ en $x[2] = \phi'$ als toestandsvariabelen. Grondharmonische met $B = 2$ (a) en 3-de subharmonische met $B = 9.8$ (b).

Het niet-lineaire RLC-circuit van figuur 21 modelleert een serieverbinding van een condensator en een spoel met ijzerkern. Naast anderen, hebben G.J. Elias en medewerkers dit circuit in de tweede helft van de jaren veertig intensief bestudeerd [2]. Bij de theoretische behandeling bracht Elias de (geringe) circuitverliezen echter niet zoals in figuur 21 via een (grote) parallelweerstand in rekening, maar middels een (kleine) serieweerstand. Ter vereenvoudiging van de niet-lineaire analyse werd de verliesweerstand in een later stadium evenwel weer verwaarloosd, aldus uitkomend bij de *dempingsvrije vergelijking van Duffing* ($R \rightarrow \infty$ in figuur 21; $k = 0$ in (5.3)). (N.B. Uit [2] blijkt niet dat Elias op de hoogte was van Duffing's werk.) Centraal thema in het werk van Elias is het onderzoek naar subharmonischen, steeds in hun afhankelijkheid van de bronsterkte E (figuur 21). Vooral is aandacht besteed aan het plotseling springen (het 'kipverschijnsel' van Elias) van het circuitgedrag bij zekere kritische waarden van de parameter E (de 'kipgrenzen' van Elias). De nauwgezette beschrijving die Elias van de gecompliceerde trillingsverschijnselen gaf, passen in het verderop te behandelen concept van een bifurcatie-diagram. Dan zal ook blijken dat het optreden van subharmonische trillingen een belangrijke aanwijzing is voor mogelijk chaotisch gedrag.

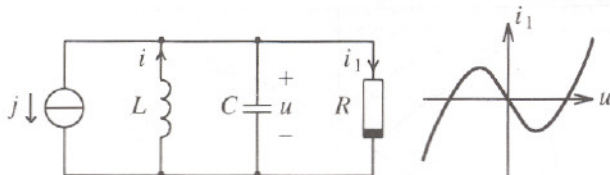
5.2 Quasi-periodieke trillingen

De lineaire combinatie van harmonischen

$$(5.4) \quad x = A \cos(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t)$$

is *quasi-periodiek* als ω_1 en ω_2 *onmeetbaar* zijn, d.w.z. $\omega_1/\omega_2 \neq p/q$ met p en q rationaal. Juist het ontbreken van een gemeenschappelijke periode maakt de trilling aperiodiek. Het frequentie-spectrum is evenwel *discreet*. Op het chaotische signaal na, is het de meest onregelmatige trilling die een deterministisch model kan opwekken.

In figuur 23 staat een niet-lineair, niet-autonoom dynamisch circuit dat quasi-periodieke trillingen kan uitvoeren. Met $i_1 = -u + \frac{1}{3}u^3$ modelleert het de *gedwongen Van der Pol oscillator*.



Figuur 23. Gedwongen Van der Pol oscillator met $j = J \cos(\omega t)$.

Geheel analoog aan de eerdere afleiding van (4.5) wordt de *niet-autonome Van der Pol-vergelijking* verkregen als

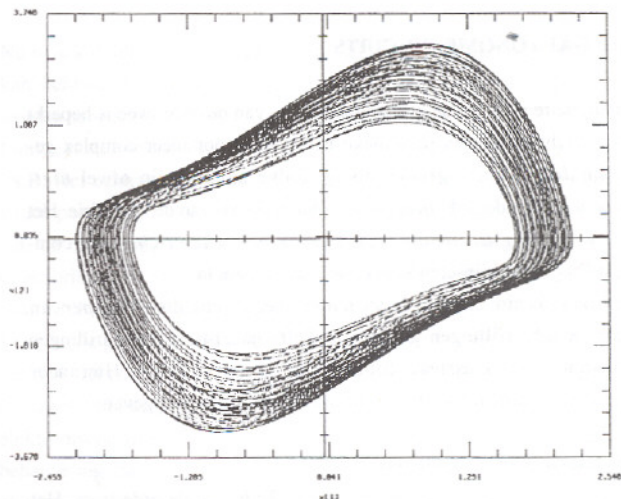
$$(5.5) \quad u'' + \varepsilon(u^2 - 1)u' + u = B \sin(v\tau),$$

waarin de notatie van (4.5) is aangehouden, terwijl $B = \varepsilon v J$ met $v = \omega/\omega_0$.

Waar de niet-lineaire term in de vergelijking van Duffing (5.3) afkomstig is van een dynamisch element (reactieve energie), brengt de Van der Pol vergelijking een niet-lineaire dampingsterm in rekening (resistieve energie).

De stationaire oplossingen van (5.5) worden bepaald door twee periodieke trillingen: de opgelegde brontrilling en de limit-cycle trilling (vrije trilling). De *niet-lineaire* interactie tussen beide belooft intrigerende uitkomsten. En inderdaad, zelfs chaotische oplossingen blijken, althans in

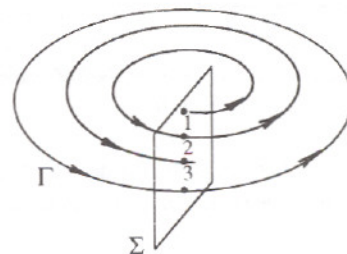
theorie, inbegrepen (zie verderop). Als de frequenties van beide trillingen niet te veel verschillen, *synchroniseren* zij spontaan tot een gemeenschappelijke periodieke trilling (dit niet-lineaire verschijnsel werd voor het eerst opgemerkt door Christiaan Huygens). Ook andere niet-lineaire interacties voeren tot periodieke oplossingen. Als de frequenties ver genoeg uit elkaar liggen en bovendien onmeetbaar zijn, kan quasi-periodiek gedrag worden verwacht. De rozet van figuur 24 toont een computer-gesimuleerd voorbeeld.



Figuur 24. Quasi-periodieke oplossing van de Van der Pol-vergelijking. $u'' + \varepsilon(1 - u^2)u' + u = B \sin(v\tau)$ met $x[1] = u$ en $x[2] = u'$ als toestandsvariabelen ($\varepsilon = 1$, $B = 0,5$, $v = 1,1$).

5.3 Poincaré-doorsnede

In de $n = 3$ -dimensionale autonome toestandsruimte van figuur 25 is het $(n - 1) = 2$ -dimensionale dwarsvlak Σ een *Poincaré-doorsnede*. (N.B. In een *autonome* toestandsruimte kunnen de trajectoriën elkaar niet snijden.)



Figuur 25. Poincaré-doorsnede Σ in toestandsruimte met limit-cycle Γ .

Trajectoriën nabij de limit-cycle Γ snijden Σ achtereenvolgens in de punten x_1 , x_2 , enz. De relatie tussen twee opeenvolgende passagepunten x_k en x_{k+1} kan worden genoteerd als

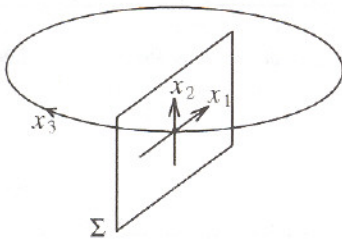
$$(5.6) \quad x_{k+1} = P(x_k),$$

waarin P de *Poincaré-afbeelding* op Σ heet. Met (5.6) wordt de n -dimensionale dynamica gecomprimeerd tot de $(n - 1)$ -dimensionale *discrete dynamica* in Σ . Daarbij wordt de *periodieke* attractor Γ afgebeeld als een enkel *attractiepunt* x^* in Σ . Met betrekking tot de discrete dynamica (5.6) is x^* een *evenwichtspunt*, waarvoor geldt $x^* = P(x^*)$.

De Poincaré-doorsnede vindt een elegante toepassing bij het *ontrafelen* van de *stationaire* dynamica van *niet-autonome* circuits onder *periodiek regime* (snijgende trajectoriën). Dit wordt ingezien als de $n = 2$ -dimensionale niet-autonome toestandsvergelijking $x' = f(x, t)$ via een kunstgreep eerst *autonoom* wordt gemaakt middels de substitutie $t = x_3$, en te schrijven (vergelijk (5.2))

$$(5.7) \begin{cases} x' = f(x, x_3) & \text{met } x(t_0) = x_0 \\ x_3' = 1 & \text{met } x_3(t_0) = t_0 \end{cases} \Leftrightarrow y' = g(y) \quad \text{met } y(t_0) = y_0$$

Hierin is $y = (x, x_3)$ de toestandsvector in de $(n + 1) = 3$ -dimensionale toestandsruimte (x, x_3) . Daar de tijd t in $f(x, t)$ terecht is gekomen via een T -periodieke bronterm, verandert de autonome toestandsvergelijking $y' = g(y)$ niet als daarin x_3 wordt vervangen door $x_3 + kT$ ($k = 1, 2, \dots$). Van deze eigenschap wordt vervolgens gebruik gemaakt door het vlak $x_3 = 0$ in de toestandsruimte (x, x_3) te *identificeren* met de vlakken $x_3 = kT$. Tenslotte wordt dit $(n+1)-1 = 2$ -dimensionale vlak Σ als Poincaré-doorsnede opgevat (figuur 26).

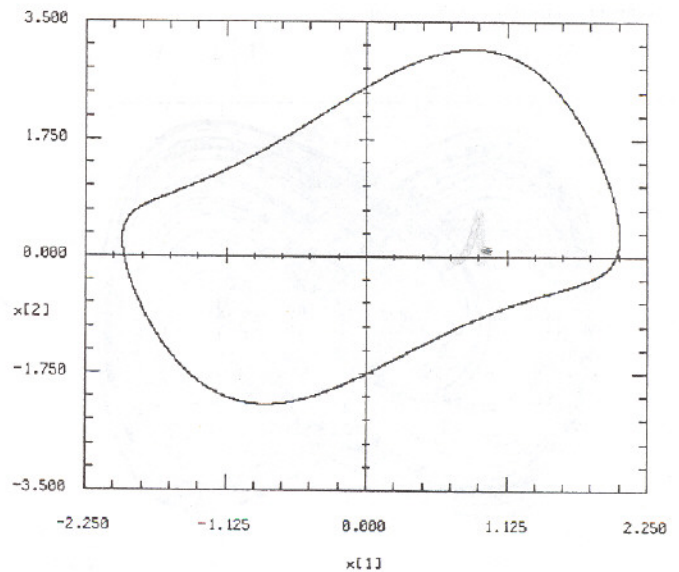


Figuur 26. Nieuwe toestandsruimte voor niet-autonome circuits onder T -periodiek regime. Het vlak $\Sigma: x_3 = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) is een Poincaré-doorsnede.

In de nieuwe toestandsruimte van figuur 26, geassocieerd met de *autonome* toestandsvergelijking $y' = g(y)$, kunnen de trajectoriën *elkaar niet snijden*. Volgens deze opzet, speelt een *stationaire* T -periodieke trajectorie dezelfde rol als de limit-cycle Γ van hierboven (T is de grondperiode van de bron)! Dus, een stationaire T -periodieke oplossing van de niet-autonome toestandsvergelijking manifesteert zich als een enkel *attractiepunt* in Σ . Een k -de *subharmonische* (met periode kT) correspondeert met k *verschillende* attractiepunten (waarvoor $x^* = P(P(\dots P(x^*)))$: k achtereenvolgende malen de Poincaré-afbeelding (5.6)). Door in de oorspronkelijke toestandsruimte T -periodieke snapshots te nemen, kunnen de attractiepunten bovendien gemakkelijk *zichtbaar* worden gemaakt. De kruisjes in figuur 22 illustreren deze *stroboscopische* interpretatie.

Een stationaire, *quasi-periodieke* trajectorie snijdt Σ bij herhaalde rondgang in steeds *verschillende* punten (de éne periode past niet op de andere). Naarmate de tijd verstrijkt, tekent zich in het stroboscopische beeld op den duur een *gesloten curve* af. (N.B. De irrationale verhouding tussen beide perioden wordt met willekeurige precisie benaderd door een wel rationaal getal, b.v. $\pi \approx 3,14 = 157/50$: uiteindelijk komt een trajectorie willekeurig dicht bij een punt dat al eerder was gepasseerd.) Hiermee onderscheidt deze *quasi-periodieke attractor* zich duidelijk van de *puntattractor* voor *periodieke* trillingen. Figuur 27 toont een quasi-periodieke attractor van de gedwongen Van der Pol oscillator (vergelijk figuur 24). Na te zijn rondgewenteld langs de x_3 -coördinaat van figuur

26, ontstaat een *torus* met de aangegeven doorsnede. Daarom heet de quasi-periodieke attractor wel een *torus attractor*.



Figuur 27. Quasi-periodieke attractor van de gedwongen Van der Pol oscillator. Parameters als in figuur 24.

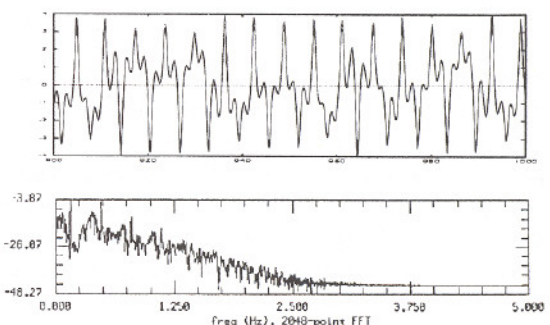
Na deze voorproef is het al duidelijk dat de Poincaré-doorsnede een effectief instrument is ter *classificatie* van niet-lineaire trillingsverschijnselen.

6. CHAOTISCHE TRILLINGEN

Tot op heden is er geen algemeen aanvaarde definitie van een aanhoudende chaotische trilling. Wel is duidelijk dat het een begrensde, *aperiodieke* doch niet quasi-periodieke trilling betreft. In tegenstelling tot de laatste, hebben chaotische trillingen een *continu frequentie-spectrum*. Anderzijds onderscheiden zulke trillingen zich van complete willekeur doordat de Poincaré-doorsnede een *geordende structuur* vertoont. Maar wat vooral verbaast, is dat zelfs *zeer eenvoudige circuits* een *zeer complex gedrag* kunnen vertonen.

6.1 Chaotische attractors

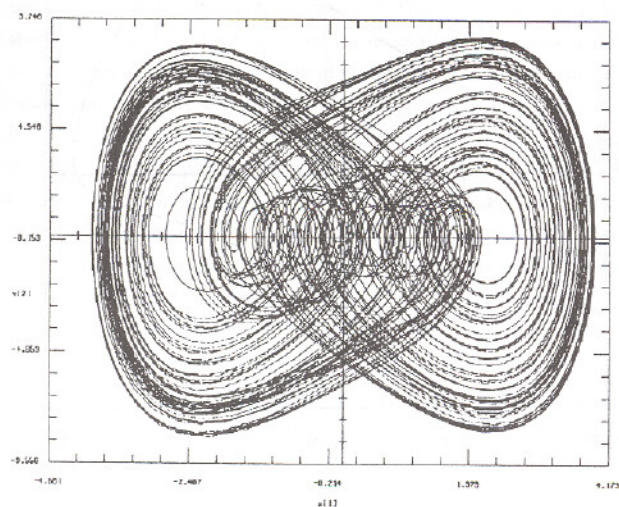
Figuur 28 toont een chaotische trilling, samen met het amplitudo frequentie-spectrum ervan. Het is een numerieke oplossing $\phi = \phi(t)$ van



Figuur 28. Chaotische trilling ϕ (a) en frequentie-spectrum Φ (b) in het circuit van figuur 21, met Duffing-vergelijking $\phi'' + 0,1\phi' + \phi^3 = 12 \cos t$.

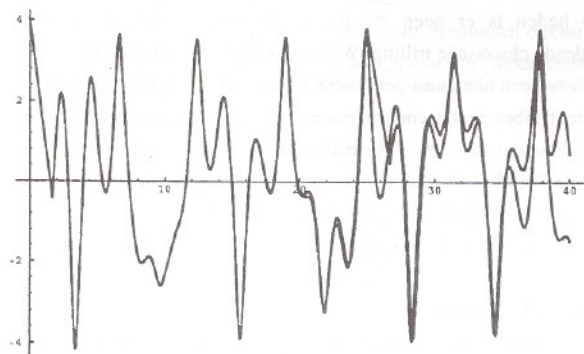
de vergelijking van Duffing (5.3), afgeleid voor het eenvoudige circuit van figuur 21 (stationair bedrijf).

De trilling manifesteert zich in de toestandruimte als een kluwen van elkaar snijdende trajectoriën (figuur 29).



Figuur 29. De chaotische trilling van figuur 28 in toestandruimte met $x[1] = \phi$ en $x[2] = \phi'$ als toestandvariabelen.

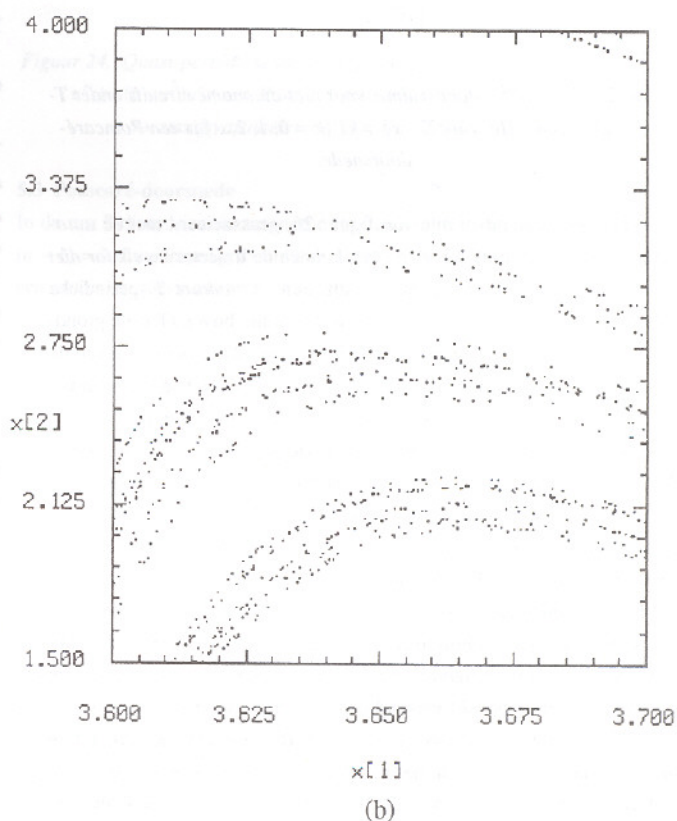
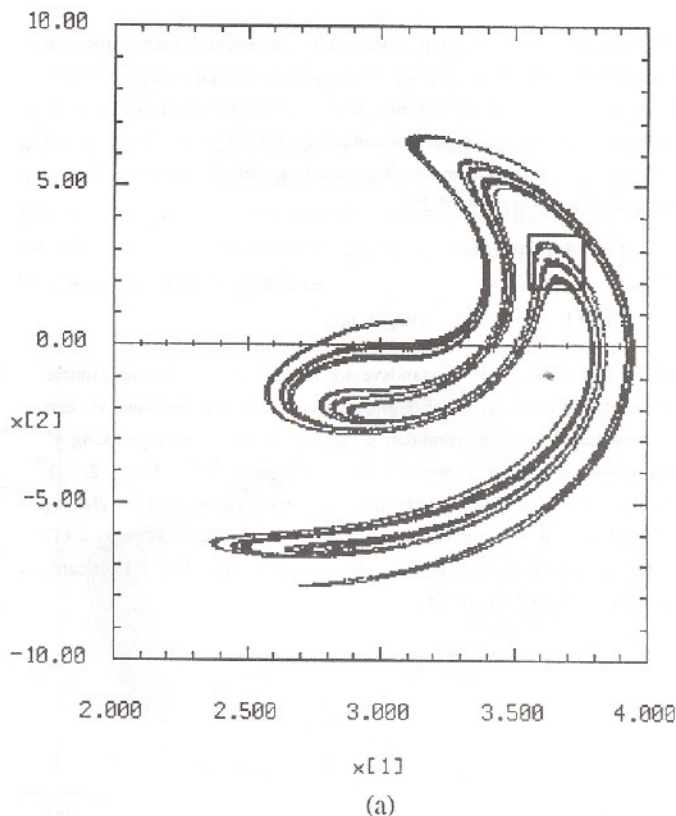
Het grillige verloop van de trilling hangt direct samen met de gevoelige afhankelijkheid van de begintoestand. Zelfs de geringste afwijking hierin, geeft op den duur een totaal verschillende uitkomst (kleine veranderingen kunnen grote gevolgen hebben; zie figuur 30).



Figuur 30. Twee oplossingen met 0,02% afwijkende begintoestand.

Het is deze eigenschap die het verloop van een chaotische trilling in experimentele opstellingen onvoorspelbaar maakt. Het is in zulke levens-echte omstandigheden immers onmogelijk om de begintoestand met wiskundige precisie voor te schrijven. Men spreekt in dit verband van een voorspelbaarheidshorizon. (N.B. In wiskundig opzicht is de chaotische trilling natuurlijk wel volledig gedetermineerd!) Deze beperking is evenwel minder dramatisch dan het lijkt, omdat de globale structuur van de chaotische trilling wel behouden blijft. De Poincaré-doorsnede van figuur 31a haalt die structuur naar voren.

De figuur toont een geordende wolk van oneindig veel punten. Zo'n compacte verzameling is karakteristiek voor elke chaotische attractor.



Figuur 31. Chaotische attractor van de chaotische trilling in figuur 28 en figuur 29(a) met fijnstructuur (b).

Andere begintoestanden convergeren naar ruwweg hetzelfde patroon (zowel in lokatie, vorm als afmeting).

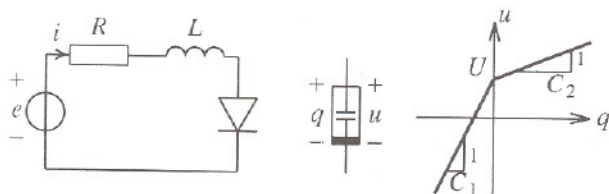
De fijnstructuur van een chaotische attractor heeft opmerkelijke eigenschappen (figuur 31b). Bij verder uitvergroten, worden zichzelf steeds herhalende patronen waargenomen, typerend voor het geometrische object waarvoor B. Mandelbrot de naam *fractal* heeft bedacht (gebroken dimensie).

De gevoelige afhankelijkheid van de begintoestand maakt dat kleine startafwijkingen zich persistent voortplanten totdat twee nabijgelegen trajectoriën zelfs geheel ongecorrelleerd raken. Toch voltrekt deze expansie tussen trajectoriën zich in een begrensd gebied van de toestandsruimte van figuur 26 (alwaar de trajectoriën elkaar niet kunnen snijden). Dit moet betekenen dat een bundel chaotische trajectoriën die eerst in de ene richting is geëxpandeerd, later in een andere richting weer omhoog. Het is dit *strek en vouw* mechanisme dat de feitelijke ordening van de chaotische attractor bepaalt (zie verderop).

Ofschoon een chaotische attractor ook als *vreemde attractor* wordt betiteld, is de attractor net zo min 'vreemd' als chaos complete willekeur is. Als gezegd, hebben de getoonde resultaten alle betrekking op het circuit van figuur 21. Dit circuit is vanaf de begindagen van de elektrotechniek uitvoerig bestudeerd, zowel experimenteel als theoretisch (o.a. door G.J. Elias). De onderzoeksresultaten tot 1964 zijn samengevat in het klassiek geworden boek van C. Hayashi [29]. Daarna heeft het tot 1978 geduurd voordat Y. Ueda de chaotische attractor van figuur 31 ontdekte [30].

6.2 Periode-verdubbeling

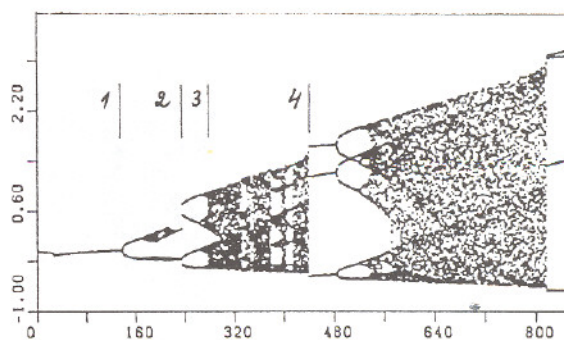
In figuur 32 staat een *niet-autonoom RL*-diode circuit. De inherente junctie capaciteit van de diode maakt het circuit van de orde twee.



Figuur 32. *RL*-diode circuit onder harmonisch regime $e = E \cos(\omega t)$ (stationair bedrijf).

Metingen hebben aangetoond dat dit simpele circuit, net als dat van figuur 21, binnen zekere grenzen van de bronamplitude E in chaos kan verkeren. Computer simulaties bevestigen dit. Daarbij is bovendien gebleken dat de resultaten weinig gevoelig zijn voor het gekozen diode model (wel is steeds een *niet-lineaire* junctie capaciteit nodig). Dit demonstreert eens te meer dat chaos een *robuust* verschijnsel is. Zelfs als het diode model drastisch wordt vereenvoudigd tot alléén de niet-lineaire capaciteit van figuur 32, blijken globaal dezelfde uitkomsten te worden verkregen [8]. Figuur 33 toont het elektrische gedrag onder deze aanname. De figuur is een één-dimensionaal *bifurcatie*-diagram met E als *bifurcatie-parameter*. Één-dimensionaal, omdat slechts één van de twee toestandsvariabelen in beeld komt.

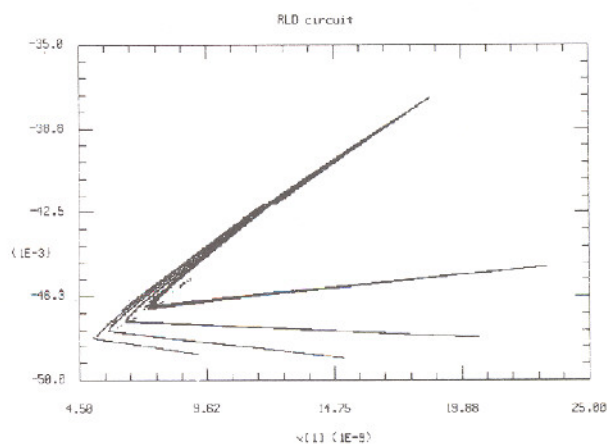
Bij elke vaste waarde van E staat vertikaal de waarde van de Poincaré-doorsnede m.b.t. $q = q(t)$ uitgezet (stationair bedrijf). Dus, k verschillende punten op de q -as duidt op de aanwezigheid van de k -de *subharmonische*. Voor $E < E_1$ staat het enige punt op de q -as voor de 'normale' T -periodieke oplossing (met $T = 2\pi/\omega$ de bronperiode). Juist voorbij het



Figuur 33. *Bifurcatie*-diagram ($R = 60\Omega$, $L = 0,1 \text{ mH}$, $U = 0,1 \text{ V}$, $C_1 = 0,1 \mu\text{F}$, $C_2 = 400 \text{ pF}$, $\omega/2\pi = 700 \text{ kHz}$ in figuur 32). Vertikale schaal q [nC], horizontale schaal E [mV].

eerste bifurcatiepunt E_1 is er plotseling een $2T$ -periodieke stroom ontstaan, die bij het tweede bifurcatiepunt E_2 even plotseling overgaat in $4T$ -periodiek gedrag. Deze *periode-verdubbeling* gaat door ad inf., totdat net voorbij de limietwaarde E_3 een niet aftelbaar aantal subharmonischen aanwezig is, corresponderend met een aperiodieke trilling met een continu frequentie-spectrum. Zo te zien, persisteert deze chaotische trilling in het eerste chaotische traject dat loopt tot E_4 , en waarna opeens een $3T$ -periodieke trilling verschijnt. Nu herhaalt het periode-verdubbelings-schema zich totdat het tweede chaotische traject wordt bereikt, enz.

Het chaotische gedrag komt volledig in beeld als de gehele chaotische attractor wordt getoond; zie figuur 34 voor een waarde van E in het vierde chaotische traject.



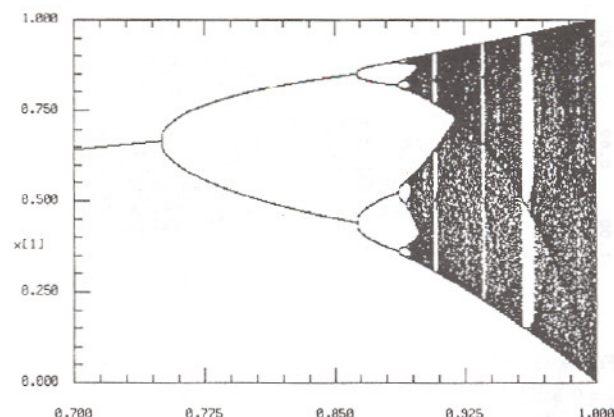
Figuur 34. Chaotische attractor van het *RL*-diode circuit ($E = 2 \text{ V}$).

Het bifurcatie-diagram van figuur 33 vertoont treffende gelijkenis met dat van een zekere klasse één-dimensionale, niet-lineaire recurrente betrekkingen van het type $x_{k+1} = f(x_k)$. Hiervan zijn de eigenschappen uitvoerig bestudeerd aan de hand van de *logist*

$$(6.1) \quad x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k) ,$$

waarin λ de bifurcatie-parameter is. Voor zekere waarden van λ heeft (6.1) één of meerdere evenwichtspunten x , waarvoor respectievelijk $x = f(x)$ of $x = f(f(x))$, enz., corresponderend met periode-1 of periode-2, enz.

oplossingen. Voor weer andere waarden van λ worden aperiodelijke oplossingen verkregen (chaos), zie figuur 35.



Figuur 35. Bifurcatie-diagram van de logist (6.1).

In 1978 ontdekte M. Feigenbaum de volgende wetmatigheid voor de periode-verdubbeling

$$(6.2) \quad \lambda_k = \lambda_{\infty} - c\delta^{-k},$$

waarin λ_k het k -de bifurcatiepunt van de bifurcatie-cascade is. M.a.w., de opeenvolgende bifurcatiepunten convergeren volgens een meetkundige reeks naar de limit λ_{∞} , waarna het eerste chaos traject verschijnt. Er volgt

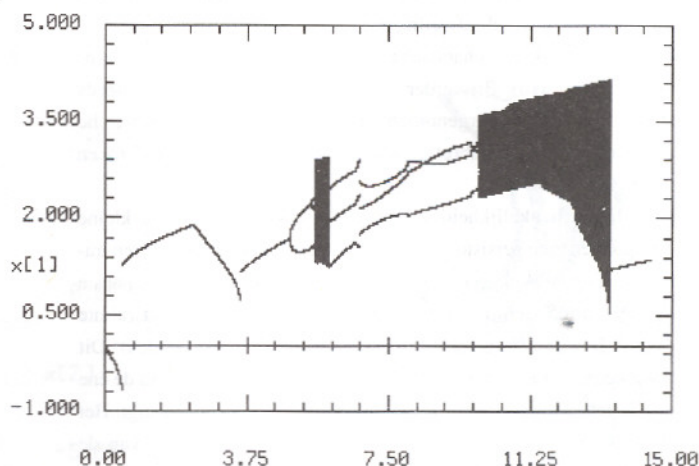
$$(6.3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \delta$$

met de door Feigenbaum numeriek gevonden waarde $\delta = 4,66920\dots$. Dit getal van Feigenbaum wordt wel een universele schaalconstante genoemd omdat precies hetzelfde getal wordt gevonden voor afbeeldingen van het type $x_{k+1} = f(x_k)$ die slechts kwalitatieve gelijkenis met de logist vertonen!

Een ander aspect van het bifurcatie-diagram is dat het optreden van een periode-3 oplossing kennelijk impliceert dat er een chaos traject is gepasseerd. Ook zijn er in de chaos trajecten smalle vensters te onderscheiden waarbinnen periodiek gedrag optreedt.

Ofschoon metingen aan het RL-diode circuit grote overeenkomsten vertonen met de logist, inclusief kwantitatieve uitkomsten als het getal van Feigenbaum, is er tot op heden, voorzover bekend, geen sluitende verklaring voor het dynamische gedrag van het simpele RL-diode circuit! De betrekkelijk eenvoudige vorm van de chaotische attractor in figuur 34 is kennelijk een aanwijzing dat de twee-dimensionale Poincaré-afbeelding (5.6) kwalitatief kan worden gemodelleerd door de één-dimensionale logist (6.1).

De suggestie wordt ondersteund door het bifurcatie-diagram van figuur 36. Het heeft betrekking op het niet-lineaire RLC-circuit van figuur 21 met meer complexe chaotische attractors van het in figuur 31 getoonde type. Ofschoon de gelijkenis met de logist inderdaad veel minder sprekend is, zijn er niettemin duidelijke overeenkomsten. Weer wordt periode-verdubbeling waargenomen, terwijl het verschijnen van de 3-de subharmonische ook hier chaos impliceert. Voorts zijn er bij verder uitvergroten binnen de chaos-trajecten smalle vensters met (subharmonisch) periodiek gedrag te onderscheiden. Ook op grotere schaal wisselen periodieke en chaotische trajecten elkaar steeds af.



Figuur 36. Bifurcatie-diagram m.b.t. het niet-lineaire RLC-circuit van figuur 21, met Duffing-vergelijking $\phi'' + 0,1\phi' + \phi^3 = B \cos t$ (B is de bifurcatie-parameter).

De discontinuïteiten in het bifurcatie-diagram zijn de eerder genoemde 'kipverschijnselen' die G.J. Elias met analytische middelen heeft onderzocht [2]. Zij worden verklaard door bifurcaties die naast een stabiele trilling, tevens een instabiele, en derhalve experimenteel niet waarneembare trilling ten gevolge heeft.

De door Elias gerapporteerde kwalitatieve experimentele uitkomsten m.b.t. de niet-lineaire condensator-spoel seriekring worden in hoofdzaak bevestigd door de computerberekening van figuur 36 [2c]. Naast de juist beschreven kwalitatieve overeenkomsten met de logist, constateerde Elias eveneens de duidelijke afwijking, dat voorbij een voldoende grote waarde van de bronamplitude ($B \approx 13$ in figuur 36) plotseling weer een periodieke trilling met de grondfrequentie verschijnt (wel super-, maar geen subharmonischen; de 'staart' in de figuur).

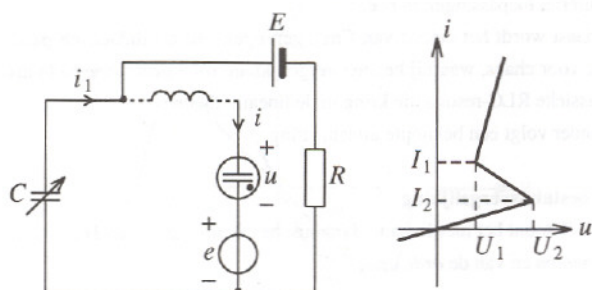
Voorts heeft het er alle schijn van dat de chaos-trajecten in figuur 36 juist de door Elias experimenteel waargenomen 'instabiele toestanden' zijn. Zonder daar overigens veel extra aandacht aan te besteden, identificeerde Elias genoemde toestanden op theoretische gronden in elk geval met aperiodelijke trillingen [2c, d]! Zou Elias het interpretatiekader van een Poincaré-doorsnede tot zijn beschikking hebben gehad, dan zou de door Ueda in 1978 ontdekte chaotische attractor van figuur 31 zijn verschenen!

6.3 Periode-bijtelling

Figuur 37 toont de klassieke neonbuis-oscillator waarover Van der Pol en Van der Mark in 1927 berichten 'onregelmatige ruis' te hebben waargenomen. Het circuit was bedoeld als frequentie-deler (zie bijgevoegde overdruk).

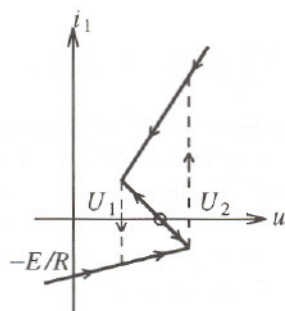
Omdat een valide dynamisch model van de neonbuis de toevoeging van een kleine serie-inductiviteit vereist (gestippeld weergegeven), is het niet-autonome circuit van de orde twee.

Als $e = 0$, 'ziet' de capaciteit C bij een eerste verwaarlozing van de parasitaire inductiviteit een resistieve parallelverbinding, bestaande uit de neonbuis en een spanningsdoos. Indien $(E - U_1)/I_1 < R < (E - U_2)/I_2$ wordt daarvoor u -i-karakteristiek van figuur 38 gevonden, resulterend in de aangegeven dynamische route. De limit-cycle die bij toevoeging van



Figuur 37. Gedwongen neonbuis-oscillator met $e = E_1 \cos(\omega_1 t)$ en C als bifurcatie-parameter.

de eerder verwaarloosde inductiviteit ontstaat, heeft, zoals eerder be-
toogd, bij benadering dezelfde vorm.



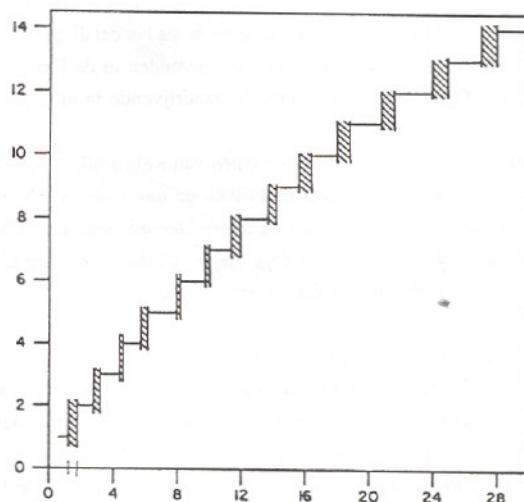
Figuur 38. Het autonome circuit van figuur 37 is een relaxatie-oscillator ($e = 0$).

Het autonome circuit ($e = 0$) functioneert als een *relaxatie-oscillator* waarvan de frequentie ω_0 kleiner (groter) wordt als de variabele C op een grotere (kleinere) waarde wordt ingesteld.

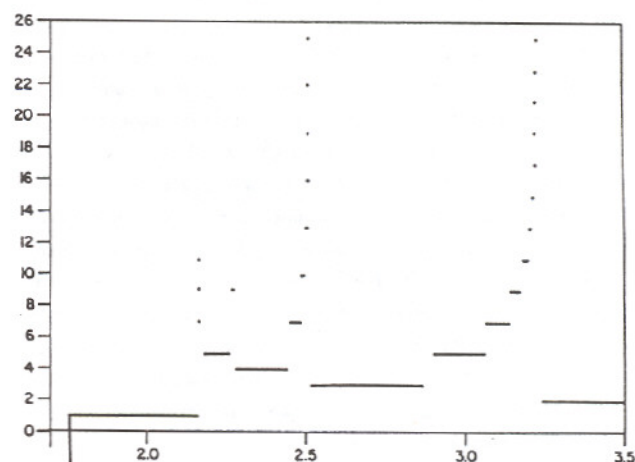
Nu wordt de relaxatie-oscillator onder het regime geplaatst van $e = E_1 \cos(\omega_1 t)$. Indien ω_0 niet te veel van ω_1 verschilt, blijkt de oscillator te worden gesynchroniseerd door de opgelegde frequentie ω_1 (het Huygens-effect). Bij een continue verlaging van ω_0 (C groter) gaat de synchronisatie bij een zekere waarde van C (bifurcatiepunt) plotseling verloren waarna de oscillator voor een net nog iets lagere waarde van ω_0 wordt *gevangen* in de frequentie $\omega_1/2$ (2-de subharmonische). Volgens deze synchronisatie eigenschappen van de oscillator worden bij steeds verder verlagen van ω_0 achtereenvolgens de frequenties $\omega_1/3$, $\omega_1/4$, enz. verkregen. Dit was het gedrag waar Van der Pol en Van der Mark naar zochten. De 'trap'-structuur van figuur 39a geeft dit weer.

In de kleine frequentie-intervallen, gelegen tussen de frequentie waar plotseling *verlies van synchronisatie* met een vorige subharmonische optreedt, en de frequentie waarbij de oscillator wordt *gevangen* in de volgende, observeerden Van de Pol en Van der Mark de 'onregelmatige ruis' (in figuur 39a gearceerd weergegeven). Daarmee waren zij de eersten die in de internationale vakliteratuur gewag maakten van wat naderhand chaos is gebleken.

In 1986 hebben Kennedy en Chua het experiment van Van der Pol en Van der Mark zo goed mogelijk herhaald [31]. Daarbij verkregen zij in de eerste plaats de resultaten uit 1927 terug, maar vonden bovendien een onderliggende *ordering* in de 'ruis'-intervallen. Deze blijkt er ondermeer



(a)



(b)

Figuur 39. Bifurcatie-diagram met C als bifurcatie-parameter.

uit te bestaan dat de trap-structuur van figuur 39a zichzelf in die intervallen eerst herhaalt, om zich binnen die duplicaten met nog weer fijnere duplicaten opnieuw te herhalen enz., typerend voor de fractale structuur van de zogenaamde *duivelstrap*, zie figuur 39b.

Anders dan de periode-verdubbeling van hiervoor, blijkt nu dat bij elke stabiele periode (trede van een trap) een wetmatig bepaald *geheel* getal moet worden *opgeteld* om de volgende te bereiken. Deze *periode-bijtel-*ling wordt onderbroken door steeds smallere intervalletjes waarbinnen verlies van synchronisatie optreedt, uitmondend in chaos.

De kwalitatieve gedragsbeschrijving van hierboven is juist de signatuur van de één-dimensionale *cirkel-afbeelding*

$$(6.4) \quad \theta_{k+1} = \theta_k + \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi\theta_k) + \omega_0 / \omega_1 \quad ,$$

die wel meer opduikt als vereenvoudigd model bij synchronisatie vraagstukken waar twee frequenties ω_0 en ω_1 niet-lineair interacteren (λ is de

bifurcatie-parameter). Het model speelt dezelfde rol als de logist van hiervoor.

De werkelijke verklaring voor zowel het globale als het detail-gedrag van de relaxatie-oscillator moet echter worden gevonden in de limit-cycle beweging van figuur 38 als daar ook de aandrijvende bronfrequentie wordt ingebracht.

De besproken verschijnselen zijn *prototypen* van *wegen naar chaos* als gevolg van bifurcaties. Onbesproken blijven de *quasi-periodieke* weg naar chaos ('torus-break-down') en de *intermitterende* weg naar chaos (waar intervallen van min of meer regelmatige trillingen worden afgewisseld door korte uitbarstingen van onregelmatig gedrag).

6.4 Van der Pol en niet-lineaire dynamica

De *eenvoud* van de niet-autonome Van der Pol-vergelijking (5.5) contrasteert scherp met de mogelijke *complexiteit* van de oplossingen. Geïnspireerd door de eerste publikaties van Van der Pol in de jaren twintig [3], rapporteerden Cartwright en Littlewood in 1945 een 'slechte' oplossing te hebben gevonden [32], en bewees Levinson in 1949 het bestaan van 'singuliere' oplossingen [33]. Deze oplossingen worden volgens een willekeurig patroon heen en weer geslingerd tussen twee verschillende subharmonischen, en staan nu bekend onder de naam 'chaos'. Op zijn beurt werd Smale door deze uitkomst op het spoor gezet om in 1967 zijn wiskundige model voor chaos te bedenken (de zogenaamde hoefijzerafbeelding, zie verderop) [34]. De anti-climax volgde in 1983, toen Parker en Chua merkten dat de theoretisch wel gevonden chaos experimenteel niet waarneembaar bleek (de stationaire chaotische trillingen blijken uiterst kritisch voor de begintoestand) [35]. Curieus genoeg, werd bij deze eerste speurtocht naar 'onregelmatigheid', de gedwongen *neonbuis-oscillator* van Van der Pol geheel over het hoofd gezien. En dat, terwijl Van der Pol en Van der Mark reeds in 1927, nota bene als eersten, rapporteerden 'onregelmatige ruis' te hebben waargenomen (kennelijk zonder zich ten volle te realiseren dat het hier een specifieke onregelmatigheid betrof). Als gezegd, werd hun experiment pas in 1986 herhaald, waarbij het chaotische karakter van de 'onregelmatige ruis' inderdaad werd aangetoond.

B. van der Pol behoort samen met G. Duffing tot de meest prominente vroege onderzoekers op het gebied van de moderne niet-lineaire dynamica.

7. OSCILLATOR VAN CHUA

In 1983 heeft L.O. Chua een zo eenvoudig mogelijk elektrisch circuit op papier gezet dat een autonome chaotische attractor zou moeten hebben [36]. Na een spoedige computer-simulatie en de kort daarop volgende experimentele bevestiging, is dit circuit sindsdien onderwerp van intensieve studie. Het is inmiddels het best begrepen circuit dat chaotische trillingen produceert. Er wordt zelfs geclaimd dat de materiële realisatie van Chua's circuit thans het enige concrete en robuuste systeem is waarin chaos zowel *experimenteel*, *numeriek* als *analytisch* is aangetoond. Het circuit is gemakkelijk en tegen lage kostprijs te bouwen met standaard componenten. Recentelijk zijn er ook chip versies van.

Met al zijn varianten, speelt het circuit van Chua een prominente rol in het chaos onderzoek. Het vertoont een breed repertoire aan niet-lineaire dynamische verschijnselen (limit-cycles, torus attractors en chaotische attractors), inclusief de bifurcatie wegen naar chaos van de vorige paragraaf. Daarbij wordt men al snel geconfronteerd met fundamentele en

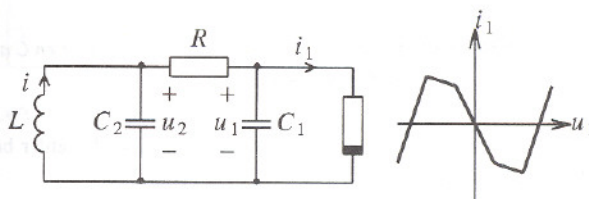
deels onopgeloste wiskundige vraagstellingen. Niettemin komen er sinds kort allerlei toepassingen in beeld.

Daarnaast wordt het circuit van Chua gepropageerd als didactisch paradigma voor chaos, waarbij het een vergelijkbare rol wordt toebedacht als de klassieke RLC-resonantie kring in de lineaire theorie.

Hieronder volgt een beknopte uiteenzetting.

7.1 Toestandsvergelijking

Figuur 40 toont het niet-lineaire dynamische circuit van Chua. Het circuit is *autonoom* en van de *orde drie*.



Figuur 40. Het circuit van Chua.

Het enige niet-lineaire element is de *actieve* spanningsbestuurde weerstand. Daarbij zijn de segmenten met *negatieve* helling een cruciaal ontwerpcriterium. De segmenten met een positieve helling zijn niet van belang voor een chaotische werking, maar natuurlijk wel met het oog op een praktische implementatie. De keuze voor een stuksgewijs affiene karakteristiek is evenmin essentieel. Voordeel is wel dat zo'n karakteristiek eenvoudig kan worden gerealiseerd (zie verderop) en zich bovendien gemakkelijk leent voor analytische doeleinden. Daarbij wordt de niet-lineaire weerstand op elk lijnsegment vervangen door een geschikte stroom- of spanningsdoos, zodat een *stuksgewijs lineaire* circuit interpretatie mogelijk wordt.

Indien de *u-i*-relatie van de niet-lineaire weerstand wordt genoteerd als $i_1 \equiv \tilde{i}(u_1)$, luiden de circuit vergelijkingen

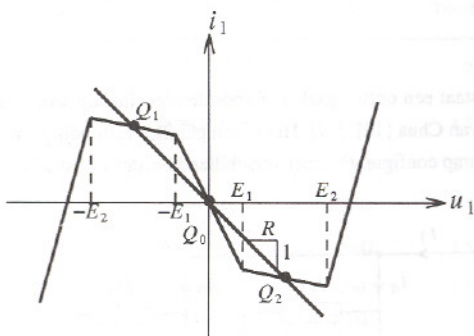
$$(7.1) \quad \begin{cases} u_1' = -\frac{1}{RC_1}u_1 - \frac{1}{C_1}\tilde{i}(u_1) + \frac{1}{RC_1}u_2 \\ u_2' = \frac{1}{RC_2}u_1 - \frac{1}{RC_2}u_2 + \frac{1}{C_2}i \\ i' = -\frac{1}{L}u_2 \end{cases}$$

Met $x = (u_1, u_2, i)$ als toestandsvector wordt (7.1) herkend als de nu drie-dimensionale, niet-lineaire *autonome toestandsvergelijking* van (4.2), te weten $x' = f(x)$ met $x(t_0) = x_0$ een gegeven begintoestand. Er volgt dat de trajectoriën elkaar *niet kunnen snijden*.

Wegens de symmetrische *u-i*-karakteristiek vertoont het snelheidsveld $f(x)$ *punt-symmetrie* t.o.v. de oorsprong van de toestandsruimte ($f(x) = -f(-x)$).

7.2 Chaotische attractor

Formeel volgen de *evenwichtspunten* in de drie-dimensionale toestandsruimte via het nul stellen van het rechterlid van (7.1) als de oplossingen van $u_2 = 0$, $u_1 + Ri = 0$ en $u_1 + R\tilde{i}(u_1) = 0$. Zij corresponderen met de snijpunten van de niet-lineaire weerstandskarakteristiek met de *belastinglijn* $u_1 = -Ri_1$ (vervang de capaciteiten en de inductiviteit in Chua's circuit respectievelijk door open klemmenparen en een kortsluiting). Volgens de opzet van figuur 41 zijn er *drie* evenwichtspunten, respectievelijk genoteerd als x_{Q1} , x_{Q0} en x_{Q2} .



Figuur 41. Niet-lineaire weerstandskarakteristiek met belastingslijn. Q_1 , Q_0 en Q_2 corresponderen met de evenwichtspunten x_{Q1} , x_{Q0} en x_{Q2} van Chua's circuit.

Het lokale toestandsgedrag $x = x(t)$ nabij elk van die evenwichtspunten wordt volgens (4.3) bepaald door de Jacobi-matrix A , hier zonder moeite afgelezen als het coëfficiëntenschema in het rechterlid van (7.1), waarin $\tilde{i}(u_1) = Gu_1$, met G de lokale conductantie. Nadat A van de orde drie is, levert de karakteristieke vergelijking (4.4) voor elk evenwichtspunt drie eigenwaarden λ_1 , λ_2 en λ_3 . Afhankelijk van de circuit-parameters zijn die alle reëel of één reëel en twee complex geconjugeerd. Met de laatste mogelijkheid als uitgangspunt, worden zij genoteerd als

$$(7.2) \quad \lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega \quad \text{en} \quad \lambda_3 = \gamma$$

Onder de extra aanname voor elk evenwichtspunt x_Q

$$(7.3) \quad \sigma\gamma < 0,$$

zijn alle evenwichtspunten instabiel.

Laat vervolgens $\xi_{1,2} = \eta_1 \pm j\eta_2$ de eigenvectoren zijn die corresponderen met $\lambda_{1,2}$. Dan is het eenvoudig in te zien dat η_1 en η_2 het *eigenvlak* $E^c(Q)$ opspannen waarop de volgende spiraalbeweging wordt beschreven

$$(7.4) \quad x_c = a \exp(\sigma t) \{ \cos(\omega t + \varphi) \eta_1 + \sin(\omega t + \varphi) \eta_2 \}, \quad x_c \in E^c(Q).$$

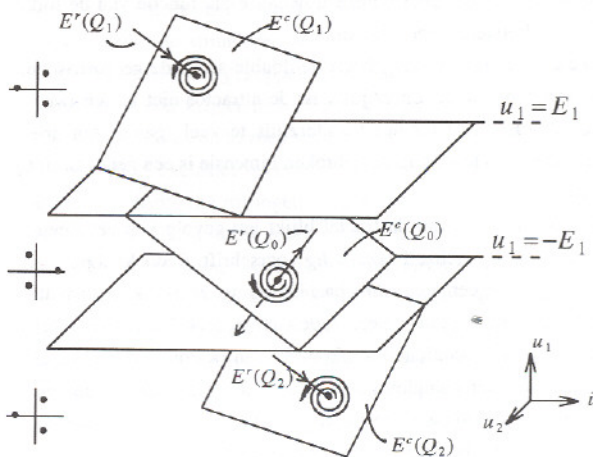
De complementaire beweging x_r van x_c voltrekt zich langs de *eigenlijn* $E^r(Q)$, opgespannen door de andere eigenvector η_3 die met λ_3 correspondeert. Er volgt

$$(7.5) \quad x_r = b \exp(\gamma t) \eta_3, \quad x_r \in E^r(Q).$$

In analogie met, en als uitbreiding op de eerder besproken indeling van figuur 15, definieert de gecombineerde lokale toestandsbeweging $x = x_c + x_r$ een *zadel-spiraal* Q . Dus, voor een positieve (negatieve) waarde van γ wordt Q gekenmerkt door expansie (contractie) langs de lijn E^r en contractie (expansie) in het vlak E^c .

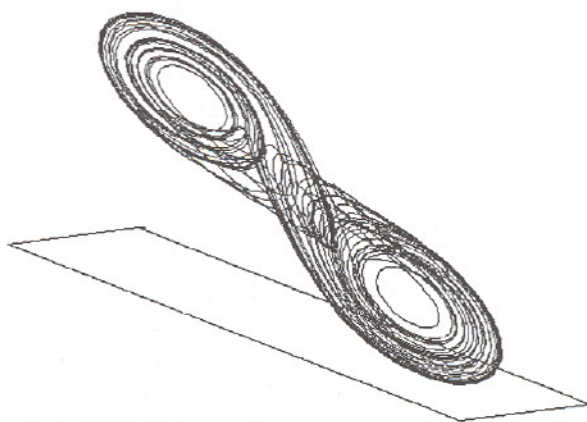
Figuur 42 geeft een schets van de eigenruimten met zadel-spiralen (vergelijk figuur 41). In overeenstemming met (7.3), zijn de circuit-parameters zó gekozen dat $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ en $\gamma_1 = \gamma_2 < 0$ ($Q_{1,2}$), terwijl $\sigma_0 < 0$ en $\gamma_0 > 0$ (Q_0).

De lokale structuur van figuur 42 is onderdeel van de *globale* dynamica die zich in de toestandsruimte voltrekt. Naar blijkt, tekent zich daar na enige tijd een begrensd geometrisch object af, waarnaar de trajectoriën vanuit een willekeurige begintoestand worden aangetrokken, en waarbinnen zich chaotisch gedrag afspeelt. Deze *chaotische attractor* is karakteristiek voor de autonome oscillator van Chua, en staat naar de



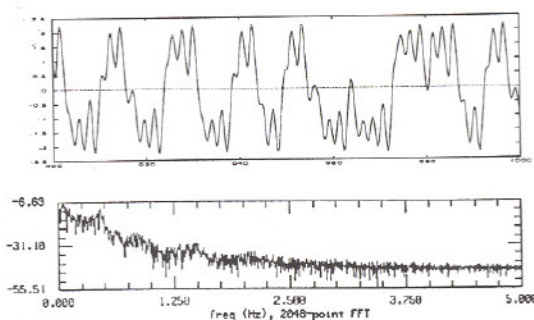
Figuur 42. Eigenruimten met zadel-spiralen.

vorm bekend als de *double-scroll*. Figuur 43 toont een computersimulatie. Metingen aan het circuit zijn er volledig mee in overeenstemming.



Figuur 43. De double-scroll chaotische attractor.

Omdat de trajectoriën elkaar niet snijden, wordt elk punt van de chaotische attractor dat al eerder werd gepasseerd weliswaar willekeurig

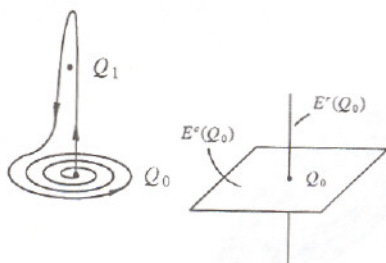


Figuur 44. Chaotische trilling (a) en frequentie-spectrum (b) in de double-scroll attractor.

vaak in de buurt, maar nooit zelf opnieuw bezocht. Figuur 44 toont de u_1 -component van zo'n aperiodelieke trajectorie als functie van de tijd, samen met het frequentie-spectrum ervan.

Zoals elke chaotische attractor, heeft de double-scroll de geometrische structuur van een fractal. Enerzijds past de attractor niet in een tweedimensionale ruimte, maar heeft anderzijds te veel 'gaten' om drie dimensies geheel op te vullen: de gebroken dimensie is een getal dat ligt tussen 2 en 3.

De complexe structuur van de fractal blijkt het gevolg van het steeds herhalen van een op zichzelf eenvoudig voorschrift. Bedoeld algoritme staat onder regie van een homocline baanbeweging, zoals die ontstaat als een trajectorie zichzelf sluit via een zadel-spiraal (een homoclinen punt). (N.B. Het begrip homocliniciteit is afkomstig van H. Poincaré, die ook al inzag dat dit een zeer complex gedrag impliceert [25].) De homocline baan komt tot stand doordat er een ander instabiel punt is dat de baan na vertrek vanuit het homocline punt er weer naar terug buigt. Figuur 45 schetst de situatie voor de double-scroll attractor. Daarin is de oorsprong Q_0 het homocline punt, terwijl Q_1 ervoor zorgt dat de trajectorie weer teruggebogen wordt; vergelijk figuur 42. (De puntsymmetrische tweede homocline baan vanuit Q_0 is niet weergegeven.)



Figuur 45. Homocline baan binnen de double-scroll. Q_0 is het homocline punt; Q_1 zorgt voor het terugbuigen.

Elke homocline baan verenigt zowel een samentrekkende, uitzettende (strekken) als een terugbuigende (vouwen) beweging. Deze baan karakteristieken kunnen worden afgebeeld op een geschikt gekozen tweedimensionale Poincaré-doorsnede nabij Q_0 . Onder de hierna te noemen voorwaarde blijkt die afbeelding vertaald te kunnen worden als het *vouw en strek* voorschrift van de eerder genoemde, maar ook nu niet nader toegelichte tweedimensionale *hoefijzer-afbeelding* van Smale. Het herhaald toepassen ervan voert tot de geometrische essentie van het chaotische gedrag binnen de double-scroll attractor.

De aanwezigheid van de *hoefijzer-afbeelding* blijkt verzekerd als in het homocline punt Q_0 is voldaan aan de volgende *ongelijkheid van Shil'nikov*

$$(7.6) \quad \gamma_0 > |\sigma_0| ,$$

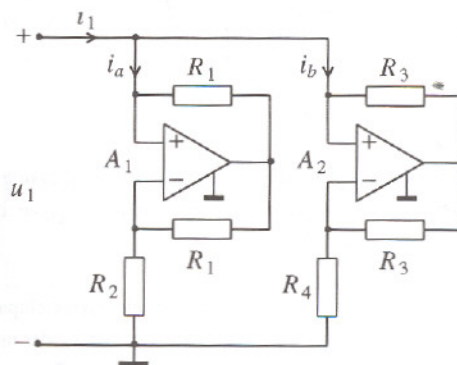
waarmee tot uitdrukking wordt gebracht dat de baansnelheid langs de lijn $E'(Q_0)$ groter is dan de radiale snelheid in het vlak $E'(Q_0)$. Tot op heden is het criterium (7.6) de sterkste indicator voor chaos. (N.B. De voorwaarde blijkt noodzakelijk voor chaotisch gedrag maar is niet voldoende; het is niet gezegd dat het *hoefijzer* een experimenteel waarneembare attractor impliceert.)

Naast de gebroken dimensie, kan een chaotische attractor ook worden gekarakteriseerd door zijn *Lyapunov-exponenten*. Dit zijn gegeneraliseerde eigenwaarden, die de gemiddelde exponentiële groeisnelheden op drie hoofdasen meten. De double-scroll attractor heeft één *positieve*

Lyapunov-exponent, duidend op de gevoelige afhankelijkheid van de begintoestand.

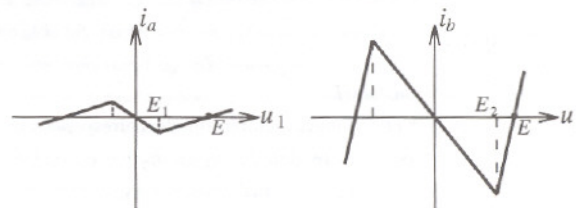
7.3 Realisatie

In figuur 46 staat een ontwerpschema voor de niet-lineaire weerstand in de oscillator van Chua [10], [37]. Het is een parallel verbinding van twee identieke op-amp configuraties met verschillende instelweerstand.



Figuur 46. Op-amp realisatie van de niet-lineaire weerstand in de oscillator van Chua.

Bij een geschikte keuze van de instelweerstand, worden de u - i -karakteristieken van de samenstellende op-amp configuraties gegeven door figuur 47.



Figuur 47. u - i -karakteristieken van de samenstellende op-amp configuraties.

In het lineaire gebied functioneert elke op-amp als een negatieve resistentie convertor. Dit geeft de segmenten met een negatieve helling. Op de aansluitende segmenten met een positieve helling verkeren de op-amps in verzadiging (in de figuur is E de verzadigingsspanning). En, omdat parallel verbinden niets anders is dan het optellen van stromen bij dezelfde spanning, wordt direct ingezien dat de realisatie van figuur 46 inderdaad de gewenste stuksgewijs affiene u - i -karakteristiek van figuur 41 oplevert.

De overige elementen in het circuit van figuur 40 zijn standaard verkrijgbaar. Hieronder staat een volledige lijst van componenten waarmee een robuuste oscillator van Chua kan worden gebouwd (zie [37] voor details). De weerstand R in figuur 40 is regelbaar uitgevoerd.

De trillingseigenschappen van de oscillator worden zichtbaar als de condensatorspanningen u_1 en u_2 respectievelijk worden aangesloten op het X en Y kanaal van een storage-oscilloscoop. Vanaf de maximale waarde van R , wordt bij het geleidelijk omlaag regelen een opeenvolging van bifurcaties waargenomen: vanaf een evenwichtspunt via een Hopf-

Lijst van componenten voor de autonome oscillator van Chua

Element	Beschrijving	Waarde	Tolerantie
A1,2	op-amp ($\frac{1}{2}$ AD 712, TL082 of equivalent)		
R1	$\frac{1}{4}$ W weerstand	22 k Ω	$\pm 5\%$
R2	$\frac{1}{4}$ W weerstand	3,3 k Ω	$\pm 5\%$
R3	$\frac{1}{4}$ W weerstand	220 Ω	$\pm 5\%$
R4	$\frac{1}{4}$ W weerstand	2,2 k Ω	$\pm 5\%$
C1	condensator	10 nF	$\pm 5\%$
R	potentiometer	2 k Ω	$\pm 5\%$
C2	condensator	100 nF	$\pm 5\%$
L	spoel (TOKO type 10RB of equivalent)	18 mH	$\pm 10\%$

bifurcatie naar een limit-cycle, om vervolgens via periode-verdubbeling tot een chaotische spiraal-attractor te geraken, waarna via periodieke vensters en verdere periode-verdubbeling de double-scroll attractor zichtbaar wordt.

Als alternatief kan in plaats van R , C_1 als bifurcatie-parameter dienen. In dat geval moet bij een vaste waarde van $R = 1800\Omega$, de condensator van 12 nF naar 6 nF worden terug geregeld om hetzelfde bifurcatie-scenario als hierboven te zien passeren. Een bijkomend voordeel is dat gedurende het omlaag regelen van de condensator, de figuren op het beeldscherm ongeveer dezelfde afmetingen houden (bij verlaging van R worden die afmetingen steeds kleiner: de afstand tussen de evenwichtspunten Q_1 en Q_2 in figuur 41 neemt af).

De besproken op-amp realisatie is slechts één van de vele mogelijkheden. Recentelijk zijn daar ook chip realisaties in CMOS bijgekomen [12]. Er kunnen dan twee verschillende ontwerp strategieën worden onderscheiden. Bij de éne aanpak worden de toestandsvergelijkingen (7.1) als bij een analoge computer geïmplementeerd middels integratoren, enz. Bij de andere opzet wordt uitgegaan van het circuit zelf, terwijl de inductiviteit eerst via een gyrator wordt nagebootst om op zijn beurt te worden gerealiseerd met operationele transconductantie versterkers (OTA's).

8. CONCLUSIES

Realistische modellen zijn over het algemeen zowel niet-lineair als dynamisch. Anders dan de naam suggereert, vertonen de daarmee verbonden chaotische verschijnselen een intrigerende ordening en zijn in het geheel niet 'vreemd'. Integendeel: in de natuur lijken ze eerder regel dan uitzondering. Binnen de elektrotechniek is parasitaire chaos onder meer gerapporteerd in phase-locked loops, synchronisatie circuits, digitale filters en switched-capacitor circuits.

Voor elektronici is het in de eerste plaats van belang om chaotisch gedrag te herkennen, zowel bij experimenten als bij simulaties. Dan wordt in elk geval voorkomen dat een ontwerp op onjuiste gronden wordt verworpen. Bovendien kan het verlopen van één of meerdere circuit-parameters de oorzaak zijn dat een eerder goed functionerend circuit alsnog in chaos geraakt.

De besproken bifurcatiewegen naar chaos kunnen behulpzaam zijn. Daarbij kwam naar voren dat verlies van synchronisatie en het ontstaan van subharmonische trillingen aanwijzingen zijn voor mogelijk chaotisch gedrag.

Daar waar het vroegere onderzoek in de niet-lineaire dynamica werd gekenmerkt door analytische benaderingstechnieken, toegespitst op het

verkrijgen van één enkele oplossing, ligt thans de nadruk op geometrische, kwalitatieve methoden. Computer experimenten verschaffen de nodige intuïtie, en stimuleren de wiskundige bewijsvoering. Lopende onderzoeksthema's als (gekoppelde) oscillators, sigma-delta modulators, neurale netten, enz. krijgen thans een nieuwe impuls.

Het praktische chaos onderzoek staat in de kinderschoenen. Tot voor kort was het vrijwel exclusief beperkt tot het voorspellen en beheersen van ongewenste chaotische trillingen. Thans komen evenwel tevens toepassingen van het intentioneel gebruik van chaos in beeld. Als voorbeeld geldt het onderzoek naar beveiligde communicatie, waar de informatie wordt verstopt in een chaotisch signaal. De synchronisatie tussen zender en ontvanger, beide toegerust met een identiek chaotisch circuit, moet er voor zorgen dat de informatie wordt teruggewonnen. De ontcijferings-sleutel wordt geleverd door de circuit-parameters (zie [38] voor een overzicht van lopend onderzoek).

De auteur dankt Ir. N.H. Waning voor het maken van de figuren en het uitvoeren van de computer berekeningen. Er werd gebruik gemaakt van het software pakket INSIDE [39].

Literatuur

- [1a] Pol, B. van der, De amplitude van vrije en gedwongen triode-trillingen, *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel I (1920), blz. 3-31.
- [1b] Pol, B. van der, Trillinghysteresis bij een triode-generator met twee graden van vrijheid, *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel I (1921), blz. 125-147.
- [1c] Pol, B. van der, Gedwongen trillingen in een systeem met niet-lineaire weerstand, *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel II (1924), blz. 57-73.
- [1d] Pol, B. van der, Over "relaxatie-trillingen", *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel III (1926), blz. 25-40.
- [1e] Pol, B. van der, Over "relaxatie-trillingen" (II), *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel III (1927), blz. 94-105.
- [1f] Mark, J. van der en Balth. v.d. Pol, Het opwekken van sinusoidale trillingen met een trillingstijd, bepaald door een relaxatietijd, *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel VI (1934), blz. 79-90.
- [2a] Elias, G.J. en H. Miedema, Enige trillingsverschijnselen in een niet-lineair circuit, *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel XI (1946), blz. 141-171.
- [2b] Elias, G.J., Over schakelingen met niet-lineaire karakteristiek, *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel XIII (1948), blz. 37-50.
- [2c] Elias, G.J. en S. Duinker, Enige theoretische beschouwingen en experimenten over trillingsverschijnselen in circuits met niet-lineaire elementen, *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel XIV (1949), blz. 163-191.
- [2d] Elias, G.J. en Duiker, S., Trillingsverschijnselen in een circuit met gebroken lineaire karakteristiek, *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel XV (1950), blz. 79-91.
- [2e] Elias, G.J., S. Duinker en Tan Soen Hong, Over de invloed van de inschakelhoek bij het opwekken van subharmonische trillingen in een niet-lineair circuit, *Tijdschr. Ned. Radiogenootschap*, Deel XVI (1951), blz. 69-84.
- [3] Balthasar van der Pol, *Selected Scientific Papers*, H. Bremmer and C.J. Boukamp (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1960.
- [4] Chua, L.O., C.A. Desoer and E.S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, McGraw-Hill, New York, 1987.

- [5] Neerhoff, F.L., *Elektrische Circuits, model, structuur en dynamica*, deel 1, DUM, Delft, 1992.
- [6] Unbehauen, R., *Grundlagen der Elektrotechnik*, Band 2, Springer-Verlag, Berlin, Vierte Auflage, 1994.
- [7] Hasler, M. and J. Neirynck, *Nonlinear Circuits*, Artech House, Inc., Norwood, 1986.
- [8] *Proc. IEEE*, Special Issue on Chaotic Systems, aug. 1987.
- [9] *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Special Issue on Chaos and Bifurcations of Circuits and Systems, vol. 35, no. 7, 1988.
- [10] *IEEE Trans. Circuits and Systems*, I: Fundamental Theory and Applications, Special Issue on Chaos in Nonlinear Electronic Circuits, Part A. Tutorials and Reviews, vol. 40, no. 10, 1993.
- [11] *IEEE Trans. Circuits and Systems*, I: Fundamental Theory and Applications, Special Issue on Chaos in Nonlinear Electronic Circuits, Part B. Bifurcations and Chaos, vol. 40, no. 11, 1993.
- [12] *IEEE Trans. Circuits and Systems*, II: Analog and Digital Signal Processing, Special Issue on Chaos in Nonlinear Electronic Circuits, Part C. Applications, vol. 40, no. 10, 1993.
- [13] Gleick, J., *Chaos, making a new science*, Viking Penguin Inc., New York, 1987.
- [14] Moon, F.C., *Chaotic Vibrations, An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.
- [15] Thompson, J.M.T. and H.B. Steward, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.
- [16] Devaney, R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publ. Comp., Inc., 1987.
- [17] Jordan, D.W. and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, sec. ed., 1987.
- [18] Hale, J. and H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [19] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [20] Arnold, V.I., *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, sec. ed., 1988.
- [21] Chua, L.O. and G. Zhong, 'Negative Resistance Curve Tracer', *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-32, no. 6, pp. 569-582, 1985.
- [22] Chua, L.O. and F. Ayron, 'Designing nonlinear single op-amp circuits: a cookbook approach', *Int. Journ. Cir. Theory Appl.*, 13, pp. 235-268, 1985.
- [23] Glass, L. and M.C. Mackey, *From Clocks to Chaos, The Rhythms of Life*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1988.
- [24] Kennedy, M.P. and L.O. Chua, 'Hysteresis in electronic circuits: A circuit theorist's perspective', *Int. Journ. Cir. Theory Appl.*, vol. 9, no. 5, pp. 471-515, 1991.
- [25] Poincaré, H., *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, 3 Vols. Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1894, reprinted by Dover, New York, 1957.
- [26] Rayleigh Lord, *The Theory of Sound*, 1896, reprinted by Dover, New York, 1945.
- [27] Perfetti, R., 'Piecewise-Linear Analysis of the Wien Bridge Oscillator', *Int. Journ. Cir. Theory Appl.*, vol. 22, pp. 341-356, 1994.
- [28] Duffing, G., 'Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz', *Vieweg: Braunschweig*, 1918.
- [29] Hayashi, C., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [30] Ueda, Y., 'Random Phenomena Resulting from Nonlinearity in the System described by Duffing's Equation', *Int. J. Non-linear Mechanics*, vol. 20, no. 5/6, pp. 481-491, 1985 (translated from *Trans. of the Inst. Electr. Eng. of Japan*, vol. A98, March 1978).
- [31] Kennedy, M.P. and L.O. Chua, 'Van der Pol and Chaos', *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-33, pp. 974-980, 1986.
- [32] Cartwright, M.L. and J.E. Littlewood, 'On non-linear differential equations of the second order: I. The equation $y'' - k(1 - y^2)y' + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k large', *J. London Math. Soc.*, Vol. 20, pp. 180-189, 1945.
- [33] Levinson, N., 'A second order differential equation with singular solutions', *Ann. Math.*, Vol. 50, pp. 127-153, 1949.
- [34] Smale, S., 'Differentiable dynamical systems', *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, pp. 747-817, 1967.
- [35] Parker, T.S. and L.O. Chua, 'A computer-assisted study of forced relaxation oscillations', *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-30, pp. 518-533, 1983.
- [36] Chua, L.O., 'The genesis of Chua's circuit', *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, vol. 46, no. 4, pp. 250-257, 1992.
- [37] Kennedy, M.P., 'Robust op-amp realization of Chua's circuit', *Frequenz*, vol. 46, no. 3-4, Mar.-Apr. 1992.
- [38] Madan, R.N. (ed.), *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*, World Scientific, Singapore, 1993.
- [39] Parker, T.S. and L.O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, New York, 1989.

Overdruk

B. van der Pol and J. van der Mark, 'Frequency Demultiplication', *Nature*, no. 3019, vol. 120, pp. 363-364, 1927.

Frequency Demultiplication.

It is a well-known fact that when a sinusoidal E.M.F. (of the form $E_0 \sin \omega t$) is available, it is a relatively simple matter to design an electrical system such that alternating currents or potential differences will occur in the system, having a frequency which is a whole multiple of the applied E.M.F., e.g. 2ω , 3ω , etc. For example, when the E.M.F. $E_0 \sin \omega t$ is applied to a diode-rectifier, the current in the anode circuit will include a component of double frequency, i.e. 2ω . This is therefore one method of frequency multiplication. Several other methods could easily be mentioned.

Now we found it is also possible to design an electrical system such that when the above-mentioned

E.M.F., $E_0 \sin \omega t$, is applied to it, currents and potential differences occur in the system the frequencies of which are whole submultiples of the frequency of the applied E.M.F., e.g. $\omega/2$, $\omega/3$, $\omega/4$ up to $\omega/40$.

To this end one can make use of the remarkable synchronising properties of relaxation-oscillations,

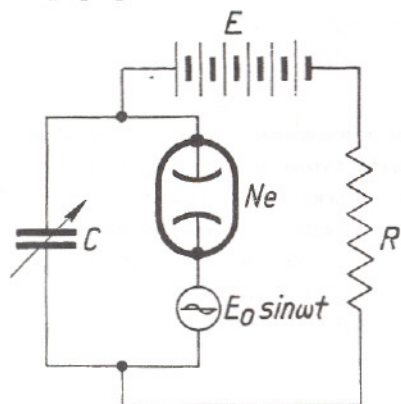


FIG. 1.

i.e. oscillations the time period of which is determined by the approximate expression $T = \pi/2 CR$, a relaxation time (Balth. van der Pol, "On Relaxation Oscillations," *Phil. Mag.*, p. 978, 1926; also *Zeitschr. f. hochfreq. Technik*, 29, 114; 1927).

Let Ne in Fig. 1 represent a neon glow lamp, R a resistance of the order of a few megohms, C a variable condenser of approximately maximum 3500 cm. capacity and E a battery of say 200 volts. In the absence of the E.M.F. $E_0 \sin \omega t$, this system will oscillate with a time period $T = a CR$ where a is a number of the order unity. With the E.M.F. $E_0 \sin \omega t$ present, where E_0 may be of the order of 10 volts (considerably lower voltages also give the same result) it is found that the system is only capable of oscillating with discrete frequencies, these being determined by whole submultiples of the applied frequency. For example, with $E_0 = 0$, give C a small value such that the natural relaxation frequency of the system is 1000 periods per second. Next apply the alternating voltage $E_0 \sin \omega t$, where ω may be made $2\pi \times 1000 \text{ sec.}^{-1}$, then the system will go on oscillating with a frequency 1000 sec.^{-1} . When now the applied $E_0 \sin \omega t$ is left as before but C is gradually increased to a much greater value, it will be found that the system continues to oscillate with a frequency 1000 sec.^{-1} . If C is next increased still further, the frequency of the oscillations in the system (as detected, for example, with a telephone coupled loosely in some way to the system) suddenly drops to $1000/2 \text{ sec.}^{-1}$, to maintain this value over a certain range of the capacity value. If C is increased still more, the frequency suddenly jumps to $1000/3 \text{ sec.}^{-1}$, and so on

up to $1000/40 \text{ sec.}^{-1}$. In some recent experiments it was found possible to obtain a frequency demultiplication up to the ratio 1:1/200. Often an irregular noise is heard in the telephone receivers before the frequency jumps to the next lower value. However, this is a subsidiary phenomenon, the main effect being the regular frequency demultiplication. It may be noted that while the production of harmonics, as with frequency multiplication, furnishes us with tones determining the musical major scale, the phenomenon of frequency-division renders the musical minor scale audible. In fact, with a properly chosen 'fundamental' ω , the turning of the condenser in the region of the third to the sixth subharmonic strongly reminds one of the tunes of a bagpipe.

In conclusion, we give in Fig. 2 the measured time periods (which are thus found to be a series of discrete subharmonics) as a function of the setting of the condenser C . The dotted line in the figure gives the frequency with which the system oscillates in the absence of the applied alternating E.M.F. The shaded parts correspond to those settings of the condenser where an irregular noise is heard. In the actual experiment the resistance R was, for ease of adjustment, replaced by a diode. The experiment, however, succeeds just as well with an ohmic resistance R . Obviously the same experiment succeeds with all systems capable of producing relaxation-oscillations such as described in the papers quoted.

BALTH. VAN DER POL.

J. VAN DER MARK.

Natuurkundig Laboratorium der
N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken,
Eindhoven, Aug. 5.

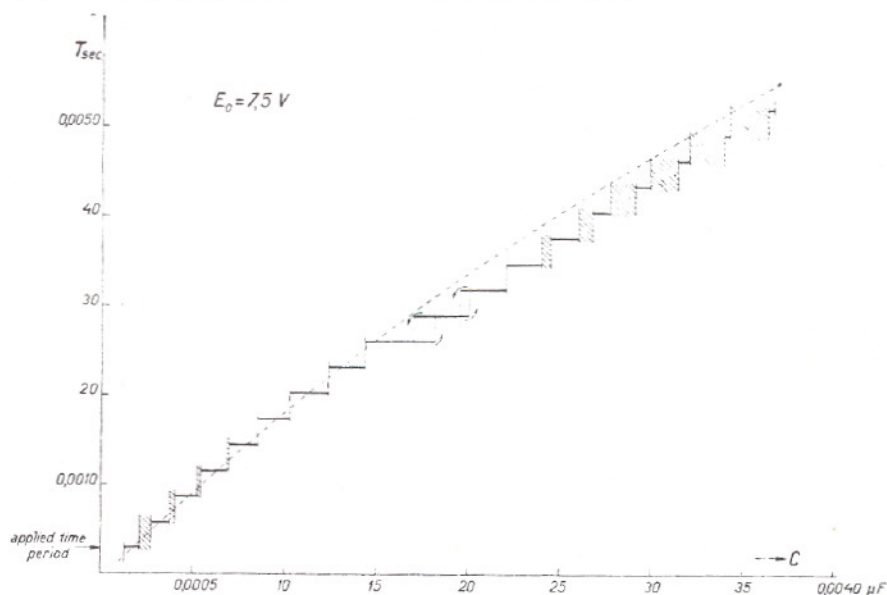


FIG. 2.